Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

08. DEZEMBER 2020

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 7. Übungsblatt

Aufgabe 26:

Sei K ein Dreieck in $\mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $\{\boldsymbol{z}_i\}_{i=1,2,3}$ und dem Schwerpunkt $\boldsymbol{z}_4$. Für eine hinreichend glatte Funktion f und einen Punkt $\boldsymbol{z}$ sei $N_{\boldsymbol{z}} f := f(\boldsymbol{z})$ die Punktauswertung von f in $\boldsymbol{z}$. Weiter seien $N_{\boldsymbol{z}}^x f := \frac{\partial}{\partial x} f(\boldsymbol{z})$ bzw. $N_{\boldsymbol{z}}^y f := \frac{\partial}{\partial y} f(\boldsymbol{z})$ die Punktauswertungen der partiellen Ableitung von f in x- bzw. y-Richtung in $\boldsymbol{z}$ (siehe Beispiel (1.8)).

Zeigen Sie, dass $(K, \mathbb{P}_3(K), \Sigma)$ ein Finites Element ist, falls

$$\Sigma = \{N_{\boldsymbol{z}_i}\}_{i=1,\dots,4} \cup \{N_{\boldsymbol{z}_i}^x\}_{i=1,2,3} \cup \{N_{\boldsymbol{z}_i}^y\}_{i=1,2,3}.$$

Aufgabe 27:

(a) Sei $\widehat{K}$ das Referenzdreieck und K ein beliebiges Dreieck in $\mathbb{R}^2$. Leiten Sie aus den Koordinaten der Eckpunkte von K explizit eine affine Transformation her, also eine Abbildung $\boldsymbol{F} : \widehat{K} \to K$ der Form $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$, so dass $K = \boldsymbol{F}(\widehat{K})$.

(b) Wie können Sie für die Matrix $\boldsymbol{B}$ aus (a) garantieren, dass $\det(\boldsymbol{B}) > 0$?

(c) Übertragen Sie Ihre Vorgehensweise auf Tetraeder in $\mathbb{R}^3$.

(d) Gibt es zwischen allgemeinen Vierecken in $\mathbb{R}^2$ affine Transformationen? Falls nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel an. Finden Sie auch eine Klasse von Vierecken, für die solche Abbildungen stets existieren.

Aufgabe 28:

Beweisen Sie Proposition (1.13) aus der Vorlesung.

Aufgabe 29:

Überlegen Sie sich, dass die Quadraturformel

(a)
$$\sum_{i=1}^{3} b_i f(c_i), \quad b_i = 1/6,\ i = 1, \dots, 3, \quad c_1 = (1/2, 0),\ c_2 = (0, 1/2),\ c_3 = (1/2, 1/2)$$

exakt für Polynome in $\mathbb{P}_2$ auf dem Referenzdreieck ist und

(b)
$$\sum_{i=1}^{4} b_i f(c_i), \quad b_i = 1/4,\ i = 1, \dots, 4, \quad c_i = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

exakt für Polynome in $\mathbb{Q}_3$ auf dem Referenzquadrat ist.

Abgabe der Übungsaufgaben bis Dienstag, 15.12.2020, 15:00 Uhr über ILIAS.
Besprechung in der Übung am selben Tag.