Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

01. DEZEMBER 2020

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 6. Übungsblatt

Aufgabe 22:

(a) Lesen und verstehen Sie das Beispiel "1.3 Dirichlet boundary conditions" auf der NGS-Py-Homepage (ohne den letzten Teil "The automatic utility. BVP"). Vergleichen Sie den beschriebenen Lösungsweg mit dem Beweis zu Satz 3.5.

(b) Verändern Sie das Beispiel nun so, dass das inhomogene Dirichletproblem

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 2\exp(y) & \text{in} \quad \Omega = [0,1]^2 \\ \qquad u = x(1-x)\exp(y) & \text{auf} \quad \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

gelöst wird.

(c) Auf der Vorlesungshomepage finden Sie die Datei `Aufg22_Omega.py`, in der ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ konstruiert wird, dessen Rand in die zwei Teilstücke Γ_1 und Γ_2 unterteilt ist. Lösen Sie das gemischte Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = \sin(x^2) & \text{in} \quad \Omega \\ \qquad u = (x+1)(y-1) & \text{auf} \quad \Gamma_1 \\ \partial_\nu u = \exp(x+y) & \text{auf} \quad \Gamma_2. \end{cases}$$

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie die Linearform für dieses Problem aussieht. Für deren Implementierung ist das Stichwort `definedon=...` hilfreich (siehe z.B. "1.5 Spaces and forms on subdomains").

Aufgabe 23:

Finden Sie geeignete Voraussetzungen, so dass das homogene Robin-Problem der Form

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ bu + \frac{\partial}{\partial n_A} u = 0 & \text{auf } \Gamma \end{cases}$$

für konstante $b \in \mathbb{R}$ (ggf. welche?) eine eindeutige Lösung besitzt.

Hinweis: Wir definieren $Lu := -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}(a_{ij}\partial_{x_j} u) + a_0 u$ und $\frac{\partial}{\partial n_A} u := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_{x_j} u\, \nu_i$.
(Bei beiden Definitionen hatten sich im (Online)-Skript bis gestern kleine Fehler eingeschlichen.)

Aufgabe 24:

Für $K \subset \mathbb{R}^2$ sei

$$\mathbb{Q}_1(K) := \{v \in C(K) \mid v : (x,y) \mapsto a + bx + cy + dxy, \text{ wobei } a,b,c,d \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Sei $T = [0,1]^2$ das Einheitsquadrat und $\Sigma = \{$Punktauswertungen in den Ecken$\}$. Zeigen Sie, dass das Tripel $(T,\ \mathbb{Q}_1(T),\ \Sigma)$ ein finites Element ist und bestimmen Sie die nodale Basis. (Dieses Element heißt "bilinear", weil die Formfunktionen linear auf jeder Kante sind.)

(b) Sei nun $\widetilde{\Sigma} = \{$Punktauswertungen in den Kantenmittelpunkten$\}$. Zeigen Sie, dass das Tripel $(T,\ \mathbb{Q}_1(T),\ \widetilde{\Sigma})$ kein finites Element ist.

Aufgabe 25:

Sei $\widehat{K} = \left\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1,\ x, y \geq 0\ \right\}$.

(a) Bestimmen Sie die nodale Basis des finiten Elementes $(\widehat{K},\ \mathcal{P}_{\widehat{K}},\ \Sigma_{\widehat{K}})$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\widehat{K}} &= \mathbb{P}_2 = \text{ Polynome vom Grad } \leq 2, \\ \Sigma_{\widehat{K}} &= \text{ Punktauswertungen in den Ecken und den Seitenmittelpunkten.} \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie die nodale Basis des finiten Elementes $(\widehat{K},\ \mathcal{P}_{\widehat{K}},\ \Sigma_{\widehat{K}})$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\widehat{K}} &= \mathbb{P}_3 = \text{ Polynome vom Grad } \leq 3, \\ \Sigma_{\widehat{K}} &= \text{ Punktauswertungen in } x_i,\ i = 1, ..., 10 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{array}{llll} x_1 = (0,0), & x_4 = (1,0), & x_7 = (2/3, 1/3), & x_{10} = (0,1). \\ x_2 = (1/3, 0), & x_5 = (0, 1/3), & x_8 = (0, 2/3), & \\ x_3 = (2/3, 0), & x_6 = (1/3, 1/3), & x_9 = (1/3, 2/3), & \end{array}$$

Abgabe der Übungsaufgaben bis Dienstag, 08.12.2020, 15:00 Uhr über ILIAS.
Besprechung in der Übung am selben Tag.