Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

24. NOVEMBER 2020

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 5. Übungsblatt

Aufgabe 18:

Nach der Vorlesung wissen wir: $u \in H^1(\Omega)$ hat die *schwache Ableitung* $\partial_i u$ bezüglich x_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, falls $\partial_i u \in L^2(\Omega)$ und

$$(\varphi, \partial_i u)_0 = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, u\right)_0 \qquad \text{für alle} \quad \varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega}).$$

Weiterhin bezeichnen wir für $u \in H^1(\Omega)$ und $(v_k)_k \to u$ in $H^1(\Omega)$ mit $v_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$, mit dem L^2-Limes

$$\mathrm{D}_i\, u := \lim_{k\to\infty} \frac{\partial}{\partial x_i} v_k$$

die *verallgemeinerten Ableitungen* von u. Zeigen Sie für beschränkte stückweise C^1-Gebiete Ω:

(a) Für $u \in C^1(\overline{\Omega})$ ist die klassische Ableitung $\partial u/\partial x_i$ eine schwache Ableitung.

(b) Für $u \in H^1(\Omega)$ sind die verallgemeinerten Ableitungen schwache Ableitungen.

Aufgabe 19:

Es sei eine Triangulierung eines beschränkten Gebietes $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine Funktion u, die auf jedem Dreieck C^1 ist, gegeben. Zeigen Sie:

$$u \in H^1(\Omega) \Longleftrightarrow u \in C(\overline{\Omega})$$

Hinweis: Aufgabe 18 (a).

Aufgabe 20:

Zeigen Sie: Für ein stw. C^1-berandetes Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine Funktion g, die stetig und stw. C^1 auf Γ ist, gibt es ein $u_0 \in H^1(\Omega)$, so dass gilt

$$\gamma(u_0) = g.$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 19.

Aufgabe 21:

Hier werden wir NETGEN/NGSOLVE zusammen mit PYTHON verwenden.

(a) Lesen und verstehen Sie das Beispiel "1.1 First NGSolve example" auf der NGS-Py-Homepage. Stellen Sie sich z.B. folgende Fragen:
Welche Gleichung wird gelöst? Auf welchen Gebiet? Wie sieht die schwache Formulierung aus? Aus welchen Raum sind die Ansatz- bzw. Testfunktionen? etc.

(b) Verändern Sie das Beispiel so, dass die Inhomogenität des Poisson-Problems jetzt

$$f(x, y) = 10 \exp(x) \cos(y)$$

ist und die Dirichlet-Bedingung $u = 0$ auf dem gesamten Rand von Ω gilt.

(c) Setzen Sie die maximale Gittergröße auf 0.3 und die Ordnung des Finite Elemente Raums (`order`) auf 1. Erzeugen Sie nun eine neue leere Gitterfunktion und tragen Sie an die $(k + 1)$-te Stelle den Wert 1 ein, wobei k ein Wert zwischen 0 und `fes.ndof-1` ist. Verwenden Sie dazu die zwei Befehle:

```
gfneu = GridFunction(fes)
gfneu.vec.FV()[ k ] = 1
```

Stellen Sie die Gitterfunktion mit Hilfe des `Draw`-Befehls grafisch dar. Welche Funktionen plotten Sie hier?

Abgabe der Übungsaufgaben bis Dienstag, 01.12.2020, 15:00 Uhr über ILIAS.
Besprechung in der Übung am selben Tag.