Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

17. NOVEMBER 2020

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 4. Übungsblatt

Aufgabe 14:

Wir betrachten Lagrange-Finite-Elemente erster Ordnung auf dem Gebiet Ω aus Abbildung 1 mit der dort angegebenen Triangulierung. Bestimmen Sie mit Hilfe der Vorüberlegungen in Aufgabe 12 für die Differentialgleichung aus Aufgabe 12 (b) die Steifigkeitsmatrix.

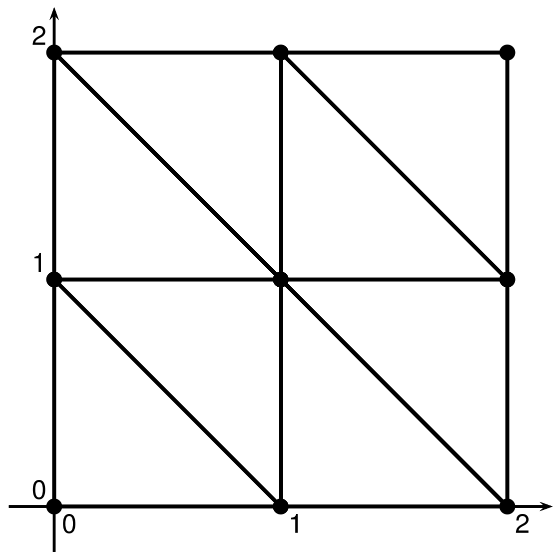

Abbildung 1: Gebiet mit Triangulierung für die Bestimmung der Steifigkeitsmatrix

Aufgabe 15:

Sei Ω ein Gebiet.

(a) Zeigen Sie, dass der Raum $C(\Omega)$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ nicht vollständig ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Raum $C^1(\Omega)$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ nicht vollständig ist.

Hinweis: Wenn Sie möchten, können Sie für die Konstruktion Ihrer Gegenbeispiele annehmen, dass Ω ein reelles Intervall ist.

b.w.

Aufgabe 16:

(a) Zeigen Sie: Ist $\dim V < \infty$, dann gilt der Satz von Lax-Milgram auch, wenn man die Koerzivitätsbedingung durch die schwächere Voraussetzung $a(v, v) > 0$ für alle $v \neq 0$ ersetzt.

(b) Sei ℓ^2 der Raum der quadratisch summierbaren Folgen, d. h. $\ell^2 := \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots) \mid \|\boldsymbol{x}\|_{\ell^2} < \infty\}$, mit der Norm $\|\boldsymbol{x}\|_{\ell^2} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2}$. Zeigen Sie, dass die Bilinearform

$$a : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}, \quad a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n y_n,$$

stetig und positiv definit, jedoch nicht ℓ^2-elliptisch ist.

Aufgabe 17:

Beweisen oder widerlegen Sie, dass das Gebiet aus Abbildung 2 stückweise C^1-berandet ist.

Hinweis: Es muss kein formaler Beweis sein, die Idee dahinter reicht.

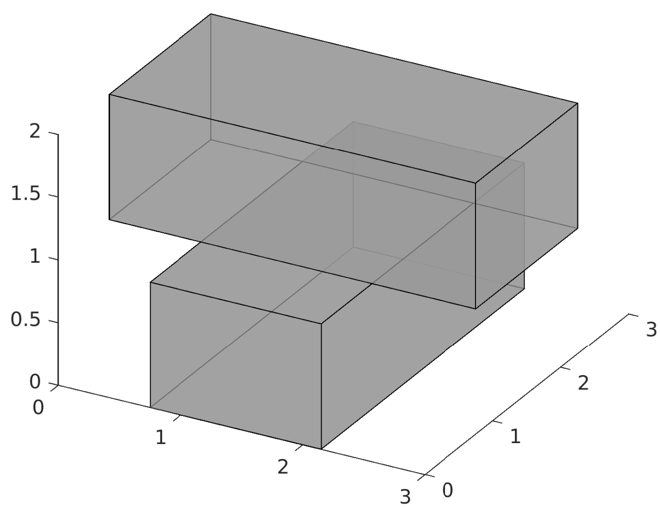

Abbildung 2: Stückweise C^1-berandetes Gebiet?

Abgabe der Übungsaufgaben bis Dienstag, 24.11.2020, 15:00 Uhr über ILIAS.
Besprechung in der Übung am selben Tag.