Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Marina Fischer

10. November 2020

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 3. Übungsblatt

Aufgabe 10:

Gegeben sei die folgende partielle Differentialgleichung mit inhomogenen Robin-Randbedingungen

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad \partial_\nu u + u = g \quad \text{auf } \Gamma, \tag{$*$}$$

wobei $f \in C(\Omega)$ vorausgesetzt ist. Zeigen Sie für $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) u ist Lösung von $(*)$.

(b) Es gilt

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + uv \right) \mathrm{d}(x,y) + \int_\Gamma uv \,\mathrm{d}\sigma = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}(x,y) + \int_\Gamma gv \,\mathrm{d}\sigma$$

für alle $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stückweise C^1.

(c) u ist Lösung des Variationsproblems

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + v^2 \right] \mathrm{d}(x,y) + \frac{1}{2}\int_\Gamma v^2 \,\mathrm{d}\sigma - \int_\Omega fv \,\mathrm{d}(x,y) - \int_\Gamma gv \,\mathrm{d}\sigma = \min!$$

unter allen $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stückweise C^1.

Hinweis: Sie benötigen für diese Aufgabe das Fundamentallemma der Variationsrechnung (siehe Aufgabe 3) weiterhin mit $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$, aber diesmal Testfunktionen $g \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

Aufgabe 11:

Beweisen Sie die Green'schen Formeln aus der Vorlesung:

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle + v\Delta u \,\mathrm{d}x = \int_\Gamma v\partial_\nu u \,\mathrm{d}\sigma \tag{1}$$

und

$$\int_\Omega v\Delta u - u\Delta v \,\mathrm{d}x = \int_\Gamma v\partial_\nu u - u\partial_\nu v \,\mathrm{d}\sigma \tag{2}$$

mit $\Gamma = \partial\Omega$, dem äußeren Normalenvektorfeld $\vec{\nu} : \Gamma \to \mathcal{S}^n$ und der äußeren Normalenableitung $\partial_\nu u = \nu \cdot \nabla u$.

Welche Voraussetzungen benötigen Sie um den Gaußschen Integralsatz anwenden zu können?

Aufgabe 12:

(a) Bestimmen Sie für die Dreiecke aus Abbildung 1 die linearen Basisfunktionen, die jeweils auf einer Ecke den Wert 1, auf den anderen beiden den Wert 0 annehmen.

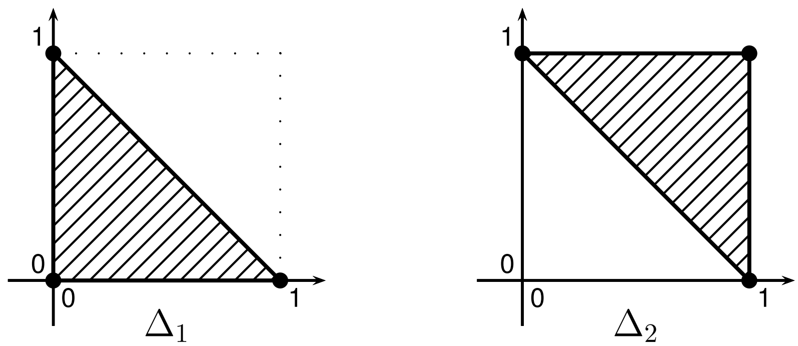

Figure 1: Dreiecke

(b) Bestimmen Sie für $\Omega = \Delta_1$ die 3×3-Steifigkeitsmatrix $A = (a(\varphi_r, \varphi_s))_{r,s}$ für die Differentialgleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad \partial_\nu u = 0 \quad \text{auf } \Gamma.$$

Aufgabe 13:

In dieser Aufgabe werden wir mit Hilfe des Programms NETGEN dreidimensionale Geometrien bearbeiten und erstellen. Den Link zur Installationsanleitung von NGS-Py (bzw. NETGEN/NGSOLVE) finden Sie auf der Vorlesungshomepage.

(a) Lesen Sie sich das Kapitel "Constructive Solid Geometry" in der NETGEN-Dokumentation von Joachim Schöberl durch, die unter https://github.com/NGSolve/netgen/blob/master/doc/ng4.pdf zu finden ist. Sehen Sie sich außerdem die `.geo`-Beispiele unter .../netgen/tree/master/tutorials in der NETGEN-GUI und in einem Texteditor an.

Hinweis: Die `.geo`-Dateien wurden auch bei der Installation mit abgespeichert. Die Pfade, unter denen sie zu finden sind, stehen auf der NGS-Py-Seite unter "Getting started with NETGEN/NGSOLVE".

(b) Erstellen Sie nun die folgenden Geometrien, indem Sie vorhandene Beispiele ändern oder neue `.geo`-Dateien schreiben:

(i) den Quader $[-1, 1] \times [0, 1] \times [1.5, 2]$ auf zwei verschiedene Arten, d.h als Schnitt von sechs Ebenen und direkt mit nur einem Befehl,

(ii) den Würfel $[0, 1]^3$ ohne den kleinere Würfel $[0.25, 0.75]^2 \times [0.5, 1]$ (das Beispiel `fichera.geo` ist hier hilfreich),

(iii) zwei ineinander verschlungene Tori (wie zwei Glieder einer Kette),

(iv) eine quadratische Pyramide mit Grundfläche $[-1, 1]^2$ und Höhe 1,

(v) eine Tasse, natürlich mit einem Henkel.

Abgabe der Übungsaufgaben bis Dienstag, 17.11.2020, 15:00 Uhr über ILIAS.
Besprechung in der Übung am selben Tag.