

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 13. Übungsblatt

[ wahr | falsch ]

**Aufgabe 50:** (I. Elliptische partielle Differentialgleichungen)

1. Das Fundamentallemma der Variationsrechnung liefert aus einer Integralgleichung eine punktweise Gleichheit. [    |    ]
2. Der 5-Punkte-Stern zur Approximation des Laplace-Operators hat Konsistenzordnung 2. [    |    ]
3. Der 5-Punkte-Stern zur Approximation des Laplace-Operators mit Dirichlet-Randbedingungen liefert auf Polygonen eine positiv definite Matrix. [    |    ]
4. Der kompakte 9-Punkte-Stern zur Approximation des Laplace-Operators hat Konsistenzordnung 2. [    |    ]
5. Gilt  $-\Delta u = f$  in  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  (beschränktes, offenes Gebiet) für  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ,  $u = g$  auf  $\Gamma$ , so folgt  $\max_{x \in \Omega} u(x) = \max_{x \in \Gamma} g(x)$ . [    |    ]
6. Gilt  $\Delta_h u_h \leq \Delta_h v_h$  in  $\Omega_h$ ,  $u_h \leq v_h$  auf  $\Gamma_h$ , so folgt  $u_h(x) \leq v_h(x)$  in ganz  $\Omega_h$ . [    |    ]
7. Der Laplace-Operator ist invariant unter Verschiebungen. [    |    ]
8. Das Argument des Minimums von  $J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v)$  über alle  $v \in V$  existiert für jeden beliebigen Vektorraum  $V$ . [    |    ]
9. Die Galerkinapproximation  $u_N$  hat in der Energienorm unter allen Elementen von  $V_N$ , wobei  $V_N$  endlich dim. UR vom Hilbertraum  $V$  ist, den kleinsten Fehler. [    |    ]

**Aufgabe 51:** (II. Variationelle Formulierung elliptischer Randwertprobleme)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein stw.  $C^1$ -berandetes Gebiet, d.h.  $\Omega$  ist insbesondere offen und beschränkt.

1. Jede klassische Lösung ist auch eine schwache Lösung. [    |    ]
2. Ist die Bilinearform eines Randwertproblems  $V$ -elliptisch, so existiert eine eindeutige schwache Lösung. [    |    ]
3. Eine hinreichend glatte schwache Lösung ist auch eine klassische Lösung. [    |    ]
4. Eine hinreichend glatte klassische Lösung ist auch eine schwache Lösung. [    |    ]
5.  $H_0^1(\Omega)$  ist vollständig bezüglich der  $H^1$ -Norm. [    |    ]

6. Für eine Cauchyfolge  $(v_n)_n \rightarrow v$  in  $H^1(\Omega)$  gilt  $(v_n)_n \rightarrow v$  und  $(\partial_i v_n)_n \rightarrow \partial_i v$  in  $L^2(\Omega)$  für alle  $i$ . [   |   ]
7.  $C^1(\Omega)$  ist dicht in  $H^1(\Omega)$ . [   |   ]
8. Die Einbettung  $H^m(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$  ist stetig. [   |   ]
9.  $H^1(\Omega)$ -Funktionen besitzen eine Spur in  $L^2(\partial\Omega)$ . [   |   ]
10. Es gibt eine von  $\Omega$  abhängige Konstante  $C$  so, dass für  $u \in H_0^1(\Omega)$  gilt  $\|u\|_{1,\Omega} \leq C|u|_{1,\Omega}$ . [   |   ]
11. Auf  $H_0^1(\Omega)$  sind die  $H^1$ -Seminorm und die  $H^1$ -Norm äquivalent. [   |   ]
12. Die Dirichletbedingung  $u = 0$  auf  $\partial\Omega$  geht in den Lösungsraum ein. [   |   ]
13. Die Neumannbedingung  $\partial_\nu u = 0$  auf  $\partial\Omega$  geht in den Lösungsraum ein. [   |   ]

**Aufgabe 52:** (III. Finite Elemente Approximation)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2$  oder  $d = 3$ , ein Polygon oder Polyeder.

1. Eine Triangulierung von  $\Omega$  ist eine nichtüberlappende Zerlegung des Gebiets in endlich viele Dreiecke. [   |   ]
2. Für einen  $k$ -dimensionalen Vektorraum  $\mathcal{P}$  und eine Basis  $\{N_1, \dots, N_k\}$  von  $\mathcal{P}'$  gibt es für jedes  $N_i$  einen Punkt  $x_i$ , so dass  $N_i(p) = p(x_i)$  für alle  $p \in \mathcal{P}$ . [   |   ]
3. Sei  $(K, \mathcal{P}, \Sigma)$  ein finites Element, so gilt  $\dim(\mathcal{P}) = |\Sigma|$ . [   |   ]
4. Die Linearform  $\ell$  bei einem gemischten Randwertproblemen mit homogenen Dirichlet-RB auf  $\Gamma_0$  und inhomogenen Neumann-RB auf  $\Gamma_1$  (mit  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ ) unterscheidet sich von der mit homogenen Dirichlet-RB auf  $\Gamma_0$  und homogenen Neumann-RB auf  $\Gamma_1$ . [   |   ]
5. Die Steifigkeitsmatrix aus Aufgabe 14 ist kleiner als die Steifigkeitsmatrix, die sich mit den Voraussetzungen aus Aufgabe 14 für die Differentialgleichung  $-\Delta u = f$  in  $\Omega$ ,  $u = 0$  auf  $\Gamma$  ergibt. [   |   ]
6. Die Steifigkeitsmatrix aus Aufgabe 14 ist kleiner als die Steifigkeitsmatrix, die sich mit den Voraussetzungen aus Aufgabe 14 für die Differentialgleichung  $-\Delta u = f$  in  $\Omega$ ,  $\partial_\nu u = g \neq 0$  auf  $\Gamma$  ergibt. [   |   ]
7. Der Interpolationsfehler wird auf dem Referenzelement kontrolliert. [   |   ]
8. Die Einbettung von  $H^m(\Omega) \hookrightarrow H^k(\Omega)$  ist für  $m > k$  kompakt. [   |   ]
9. Besitzt ein elliptisches RWP  $a(u, v) = \int_\Omega f v \, dx \, \forall v \in V$  eine Lösung  $u \in H^2(\Omega)$  für jedes  $f \in L^2(\Omega)$ , so ist es  $H^2$ -regulär. [   |   ]

**Aufgabe 53:** (IV. Iterative Verfahren)

Die Fragen 1 bis 4 beziehen sich auf das Modellproblem (Poissongleichung auf dem Einheitsquadrat mit kartesischem Gitter) aus der Vorlesung.

1. Zusätzlich zu den Quadraten der Eigenwerte der Jacobi-Iterationsmatrix ist Null ein weiterer Eigenwert der Gauß-Seidel-Iterationsmatrix. [     |     ]
2. Das relaxierte Jacobi-Verfahren mit  $\omega = 1/2$  dämpft hochfrequente Fehlerkomponenten stärker als niederfrequente. [     |     ]
3. Das Gauß-Seidel-Verfahren dämpft hochfrequente Fehlerkomponenten stärker als niederfrequente. [     |     ]
4. Das Jacobi-Verfahren konvergiert schneller als das Gauß-Seidel-Verfahren. [     |     ]
5. Beim Mehrgitterverfahren löst man das lineare Gleichungssystem auf dem feinsten Gitter exakt. [     |     ]
6. Für die Grobgitterkorrektur löst man mit dem restringierten Residuum/Defekt auf dem feineren Gitter als rechter Seite. [     |     ]
7. Zur Konvergenzanalyse von Mehrgitterverfahren benötigt man eine Glättungs- und eine Approximationseigenschaft. [     |     ]
8. Die Iteration  $\mu^{(k+1)} = \mu^{(k)} + \omega(b - A\mu^{(k)})$  konvergiert, falls sie konvergiert, gegen eine Lösung von  $A\mu = b$ . [     |     ]

**Abgabe der Übungsaufgaben bis Dienstag, 09.02.2021, 15:00 Uhr über ILIAS.  
Besprechung in der Übung am selben Tag.**