Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

26. JANUAR 2021

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 12. Übungsblatt

Aufgabe 46:

Sei A symmetrisch und positiv definit. Überlegen Sie sich, für welche θ die Richardson-Iteration

$$x^{(k+1)} = (I - \theta A)x^{(k)} + \theta b$$

gegen $\widehat{x} = A^{-1}b$ konvergiert.

Aufgabe 47:

Sei $L > 0$ ein festes feinstes Level und sei $u_L^{(k)} \mapsto u_L^{(k+1)}$ ein Schritt des Mehrgitterverfahrens. Mehrgitterverfahren sind lineare Iterationen, d. h. es gibt eine Iterationsmatrix $G \in \mathbb{R}^{N_L \times N_L}$, so dass für den Fehler $e_L^{(k)} = u_L - u_L^{(k)}$ gilt $e_L^{(k+1)} = G\, e_L^{(k)}$.

(a) Geben Sie die Iterationsmatrix G für das Zweigitterverfahren (also $L = 1$) explizit an. Gehen Sie dabei den Zweigitteralgorithmus Schritt für Schritt durch, wobei Sie folgendes beachten:

   (i) Verwenden Sie ν_1 Schritte des gedämpften Jacobi-Verfahrens als Vorglätter, dessen Iterationsmatrix durch $S := I - \omega D^{-1}A$ gegeben ist (vgl. Beobachtung (1.7)). Zeigen Sie hierbei, dass mit $u = A^{-1}b$ gilt

   $$\mathcal{L}_\omega^{\nu_1} u^{(k)} = S^{\nu_1} u^{(k)} + (I - S^{\nu_1})u,$$

   wobei die Abbildung $\mathcal{L}_\omega$ einen Glättungsschritt mit obigem Verfahren darstellt.

   (ii) Führen Sie nach der Korrektur (Schritt 4) noch eine Nachglättung des Ergebnisses durch, d.h. glätten Sie Ihr Ergebnis am Ende mit ν_2 Schritten des gedämpften Jacobi-Verfahrens.

(b) Zeigen Sie, dass in diesem Fall der Spektralradius von G nur von der Summe der Glättungsschritte $\nu_1 + \nu_2$ abhängt, nicht aber von der Anzahl der Vor- bzw. Nachglättungsschritte (ν_1 bzw. ν_2) einzeln.

Aufgabe 48:

Finden Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf dem Intervall $\Omega = [0, \pi]$, sowohl für homogene Dirichlet-Randbedingungen als auch für homogene Neumann-Randbedingungen, d.h. finden Sie alle Lösungen von

(a)

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

(b) und

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega, \\ \partial_x u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Aufgabe 49:

Sei $(H, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum. Zeigen Sie: Die Eigenwerte eines kompakten und symmetrischen Operators $T \in \mathcal{L}(H)$ sind reell.

Abgabe der Übungsaufgaben bis Dienstag, 02.02.2021, 15:00 Uhr über ILIAS.
Besprechung in der Übung am selben Tag.