Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

19. JANUAR 2021

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 11. Übungsblatt

Aufgabe 42:

Berechnen Sie die Einträge der Prolongationsmatrizen für folgende Fälle. (*Äquivalent: Finden Sie eine Matrixdarstellung der natürlichen Einbettung.*) Nutzen Sie dabei aus, dass eine Verfeinerung eines Gitters über die Bilder einer Verfeinerung des Referenzelements erzeugt werden kann.

(a) Quadratische Lagrange-Elemente auf Intervallen in $\mathbb{R}$, Verfeinerung durch Halbierung jedes Intervalls.

(b) Lineare Lagrange-Elemente auf Dreiecksgittern in $\mathbb{R}^2$, Verfeinerung durch Unterteilung jedes Dreiecks in vier kongruente Teildreiecke.

(c) Bilineare Elemente auf Vierecksgittern in $\mathbb{R}^2$, Verfeinerung jedes Vierecks in vier Teilvierecke durch Verbinden der gegenüberliegenden Kantenmittelpunkte.

(d) Lineare Lagrange-Elemente auf Tetraedergittern in $\mathbb{R}^3$, Verfeinerung jedes Tetraeders in acht Teiltetraeder unter Verwendung der Ecken und der Kantenmittelpunkte.

Aufgabe 43:

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte des durch Finite Differenzen auf $[0,1]^2$ diskretisierten Laplace-Operators mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Als Schrittweite in x- und y-Richtung sei wie immer $h = \frac{1}{m+1}$ gewählt.

Hinweis: Benutzen Sie Ihr Wissen über die Eigenwerte der Jacobi-Iterationsmatrix.

(b) Zeigen Sie, dass sich die Iterationsvorschrift

$$x^{(k+1)} = \left(I - \frac{1}{\lambda_{\max}(A_h)} A_h\right) x^{(k)} + \frac{1}{\lambda_{\max}(A_h)} b_h$$

im Modellproblem aus (a) für genügend große m der mit $\omega = 1/2$ gedämpften Jacobi-Iteration nähert.

Aufgabe 44:

Zeigen Sie Lemma (4.3), d.h. zeigen Sie, dass gilt:

(a) $|\!|\!| \cdot |\!|\!|_s$ ist tatsächlich eine Norm.

(b) $|\!|\!|x|\!|\!|_s \leq |\!|\!|x|\!|\!|_r^{1/2} \cdot |\!|\!|x|\!|\!|_t^{1/2}$ für $s = \frac{t+r}{2}$ und alle $x \in \mathbb{R}^N$.

Aufgabe 45:

Für die durch die Steifigkeitsmatrix definierten Normen $|\!|\!| \cdot |\!|\!|_s$ ist Ihnen bekannt, dass

$$|\!|\!|v_h|\!|\!|_1^2 \leq |\!|\!|v_h|\!|\!|_0 \cdot |\!|\!|v_h|\!|\!|_2 \qquad \text{für alle} \qquad v_h \in V_h.$$

Zeigen Sie, dass für die Sobolev-Normen entsprechend gilt: Es gibt eine Konstante c, so dass

$$\|v\|_1^2 \leq c\,\|v\|_0 \cdot \|v\|_2, \qquad \text{für alle} \quad v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad \text{mit } \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ n \geq 2.$$

Geben Sie c explizit an.

Abgabe der Übungsaufgaben bis Dienstag, 26.01.2021, 15:00 Uhr über ILIAS.
Besprechung in der Übung am selben Tag.