Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

12. JANUAR 2021

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 10. Übungsblatt

Aufgabe 38:

Zeigen Sie, dass

$$\varphi \mapsto A\varphi, \qquad (A\varphi)(x) = \int_a^b \sin(x+y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

ein kompakter Operator auf $L^2([a,b])$, $b > a$, ist.

Hinweis: Verwenden Sie nicht direkt die Definition, sondern Aussagen aus der Vorlesung bzw. der Übung.

Aufgabe 39:

Finden Sie die Eigenvektoren zu den nicht-Null Eigenwerten der Gauß-Seidel Iterationsmatrix G für das in der Vorlesung betrachtete Modellproblem

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{in} \quad \Omega = (0,1)^2 \\ \quad u &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Aufgabe 40:

Es sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ strikt diagonaldominant, d.h.

$$\max_{i=1,\dots,n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1.$$

Zeigen Sie, dass sowohl das Jacobi- als auch das Gauß-Seidel-Verfahren angewandt auf $Ax = b$ bei beliebigem Startwert x_0 und für jede rechte Seite b gegen $A^{-1}b$ konvergiert.

Aufgabe 41:

Implementieren Sie sowohl das Jacobi-Verfahren als auch das Gauß-Seidel-Verfahren zum Lösen von

$$Ax = b.$$

A sei dabei die Finite Differenzen Approximation an den Laplace Operator auf $[0,1]^3$ mit Gitterweite $h = 1/(m+1)$, $m = 49$, mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Wählen Sie $b = 0$ und $x^{(0)}$ als Array der Größe m^3 mit Zufallszahlen aus $[0,1)$. Führen Sie jeweils $k = 200$ Iterationen durch. Plotten Sie den Logarithmus der Fehler gegen die Anzahl der Iterationen.

Hinweis: Gestalten Sie den Algorithmus möglichst effizient, es könnte sonst sein, dass Sie sehr lange auf das Ergebnis warten müssen.

Abgabe der Übungsaufgaben bis Dienstag, 19.01.2021, 15:00 Uhr über ILIAS.
Besprechung in der Übung am selben Tag.