Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

27. OKTOBER 2020

Numerik elliptischer partieller Differentialgleichungen – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Betrachten Sie das Randwertproblem: Finde $y : [0,1] \to \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} y''(x) &= c\sqrt{1+(y'(x))^2} \quad \text{für } x \in (0,1), \\ y'(0) &= 0, \\ y(1) &= h. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass

$$y(x) = \kappa + \frac{1}{c}\cosh(cx)$$

obiges Randwertproblem löst, wobei Sie κ passend bestimmen.

Aufgabe 2:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Für eine beliebige Teilmenge $V \subset \Omega$ gelte die Erhaltungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V w(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_V f(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\partial V} \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}.$$

Hier seien $w : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ die gespeicherte Wärmeenergie (der Wärmeinhalt), $f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine Wärmequelle sowie $\boldsymbol{q} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^3$ der Wärmestrom/-fluss und $\boldsymbol{n}$ die äußere Normale $\boldsymbol{n} : \partial V \to \mathbb{S}^2$.

(a) Zeigen Sie mithilfe des Gaußschen Integralsatzes, dass in $\Omega \times \mathbb{R}_+$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}w - f + \operatorname{div}\boldsymbol{q} = 0.$$

Nennen Sie die dazu notwendigen Voraussetzungen.

(b) Es sei $u : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ die Temperatur (in Kelvin). Mit der Dichte ρ und der spezifischen Wärmekapazität c gilt $w = \rho c u$. Darüber hinaus beschreibt das Fouriersche Gesetz den Zusammenhang zwischen Temperatur und Wärmestrom durch

$$\boldsymbol{q} = -k\nabla u,$$

wobei k die Wärmeleitfähigkeit des Materials ist. Leiten Sie aus diesen Angaben und Teil (a) eine partielle Differentialgleichung für u her. Nehmen Sie dazu an, dass k, ρ und c konstant sind.

Aufgabe 3:

Beweisen Sie das Fundamentallemma der Variationsrechnung. Das heißt, zeigen Sie, dass alle $f \in C(\Omega,\mathbb{R})$, mit offenem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, für die

$$\int_\Omega fg\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall\, g \in C(\Omega,\mathbb{R})$$

gilt, die Identität

$$f \equiv 0 \qquad \text{in} \qquad \Omega$$

erfüllen.

Aufgabe 4: (EULER, 1779)

Sei das Variationsintegral

$$\mathcal{J}(u) := \int_0^1 (u'(x)^2 - 1)^2 \,\mathrm{d}x$$

auf

$$\mathcal{V} := \{\ u \in \mathrm{PC}^1\,[0,1]\ \mid u(0) = u(1) = 0\ \}$$

gegeben, wobei PC^1 der Raum der stetigen, stückweise stetig-differenzierbaren Funktionen ist.

(a) Raten Sie einen Minimierer u^* für $\mathcal{J}$.
Tipp: $\mathcal{J}(u^*) = 0$.

(b) Zeigen Sie: Auf der kleineren Variationsklasse $\mathcal{V}^1 := \mathcal{V} \cap C^1[0,1]$ ist das Infimum des Funktionals immer noch 0, es wird allerdings von keiner C^1-Funktion angenommen.

Hinweis: Verwenden Sie in (b) Ihre Lösung aus (a), um eine Folge von stetigen Funktionen zu basteln, und denken Sie zurück an das Newton-Schema.

Aufgabe 5:

Sei $\mathbb{S}_2 \subset \mathbb{R}^3$ die Kugel um den Ursprung mit Radius 1 und D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1/2, 0)$ und $(0, 1/2)$. Durch $\varphi : \mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{\sim} \varphi(D) \subset \mathbb{S}_2$ mit

$$\varphi(u,v) = \left(\frac{(1-u^2)(1-v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)},\ \frac{(1-u^2)2v}{(1+u^2)(1+v^2)},\ \frac{2u(1+v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)} \right)^T$$

sei eine Karte von $\mathbb{S}_2$ gegeben.
Berechnen Sie für $f : \mathbb{S}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x$, das Integral

$$\int_{\varphi(D)} f(x,y,z)\ \mathrm{d}S(x,y,z).$$

Hinweis: Sie können die notwendigen Berechnungen per Python, Maple, etc. durchführen. Geben Sie aber die Jacobimatrix $\mathrm{D}\varphi$, die Matrix $G = (g_{ij})_{i,j=1}^2$ sowie deren Determinante g an.

Besprechung in der Übung am Dienstag, 03.11.2020.