Variationelle Formulierung

Gesucht $u_N \in V_N$

(P_N) $\quad a(u_N, v_N) = \ell(v_N) \quad \forall v_N \in V_N$

Galerkinbedingung $\qquad$ a spd Bilinearform, ℓ Linearform

Satz (4.3)

(P_N) hat eine eindeutige Lösung

Sei $\boxed{f \in C(\Omega)}$ und

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \partial_\nu u = \pm u & \text{auf } \Gamma \end{cases}$$

$f \in C(\Omega)$

$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

Fundamentallemma der Variationsrechnung

$$\int_\Omega (-\Delta u - f)\, v = 0 \quad \forall v \in PC_0^1(\Omega)$$

$\boxed{\ddot{U}A}$ $\quad f \in C(\Omega)$ + $\int_\Omega f \cdot v = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega)$

$\Rightarrow f$

(4.4) **Satz** (Cea's Lemma)

Ist $u \in V$ Lösung von (P) und $u_N \in V_N$ Lösung von (P_N) so gilt in der Energienorm

$$\|u - u_N\|_a = \inf_{v_N \in V_N} \|u - v_N\|_a$$

„Die Galerkinapproximation u_N ist die Bestapproximation in V_N in der Energienorm"

Bemerkung Damit reduziert sich die Fehleruntersuchung für Galerkinverfahren auf die Approximationseigenschaft von V_N. Wie genau läßt sich u die exakte Lösung in V_N approximieren

Beweis Da $V_N \leq V$ ist

$$a(v_N, u) = \ell(v_N) \quad \forall v_N \in V_N$$

$$(P_N) \quad a(v_N, u_N) = \ell(v_N) \quad \forall v_N \in V_N$$

$$\Rightarrow a(v_N, \underbrace{u - u_N}) = 0 \quad \forall v_N \in V_N$$

Insbesondere $a(u - u_N - (u - v_N), u - u_N) = 0$ da $\underline{u} - u_N - \underline{u} + v_N \in V_N$

$$\Rightarrow a(u - u_N, u - u_N) = \underline{a(u - v_N, u - u_N)} \quad \forall v_N \in V_N$$

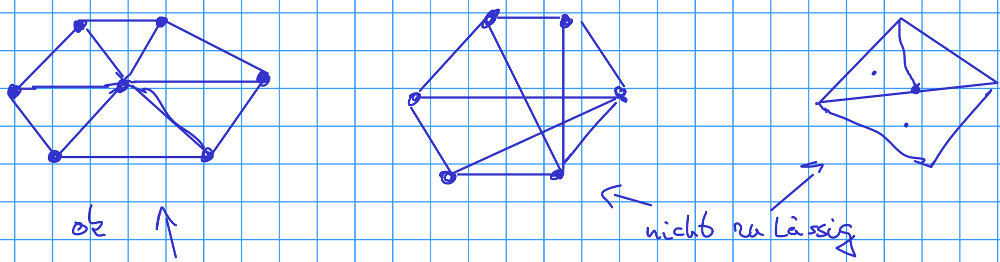
$$\Rightarrow \|u - u_N\|_a^{\cancel{2}} \underset{CSU}{\leq} \|u - v_N\|_a \cancel{\|u - u_N\|_a} \quad \forall v_N \in V_N \qquad \square$$

Offene Frage: Wahl von V_N ?

§ 5 Finite Elemente I

Ritz-Galerkin-Verfahren mit spezieller Wahl des Approximationsraumes V_N

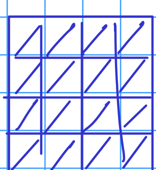
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ sei ein Polygon und in endlich viele Dreiecke unterteilt so, dass der Schnitt von zwei Dreiecken entweder leer, ein Eckpunkt oder eine (ganze) gemeinsame Kante ist.



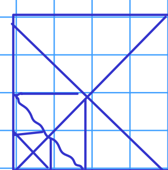
Die Unterteilung in Dreiecke heißt Triangulierung von Ω

Beispiel

$\Omega =$ 



regelmäßige Triangulierung



Triangulierung mit lokaler Verfeinerung

Notation

p_i Dreieckseckpunkte der Triangulierung $\quad i = 1..N$

(x_i, y_i) Koordinaten von p_i

oft $p_i = (x_i, y_i)$

(edge)

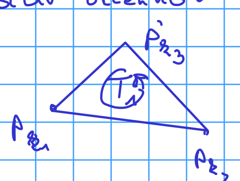
$e_j = (j_1, j_2)$ $\quad j = 1..E$ Kanten Verbindung von p_{j_1} zu p_{j_2} $\quad j_1, j_2 \in \{1..N\}$

Punktenummer

$T_k = (k_1, k_2, k_3)$ $\quad k = 1..K$ Dreiecke (triangle)

k_1, k_2 und k_3 sind die Punktnummern des k-ten Dreiecks

positiv orientiert



Notation $\overline{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{K} T_k$

Wahl einer Basis von V_N

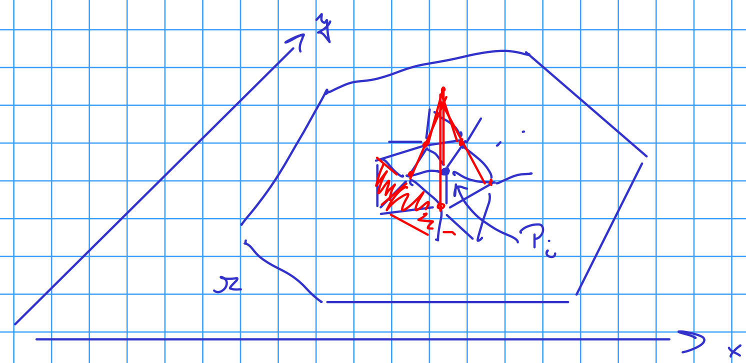
1. Beispiel $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ $\quad \varphi_i : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi_i|_{T_k}$ affin linear

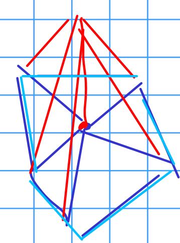
φ_i stetig mit $\varphi_i(p_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad i = 1..N$

$p_j = (x_j, y_j)$

$\varphi_i \equiv 0$ auf allen Dreiecken, die p_i nicht enthalten

$V_N = \operatorname{span}\{ \varphi_j \ j = 1..N \}$





$u_N = \sum_{i=1}^N \mu_i \varphi_i$ Lösung von (P_N)

In diesem Beispiel $\mu_i = u(x_i, y_i)$

Nach der Galerkinbedingung (P_N) erfüllt

$\mu = (\mu_i)_{i=1}^N$

$A\mu = b$ mit $A = a(\varphi_i, \varphi_j)_{i,j=1}^N$ $\quad b = (\ell(\varphi_i))_{i=1}^N$

Wir müssen also hier ein LGS lösen

Aufstellen / Berechnen von A erfolgt dreiecksweise

(5.1) Definition

Für Approximationsraum V_N mit Basis $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ eine Bilinearform a und eine Linearform ℓ heißt

i) die Matrix $A = (a(\varphi_i, \varphi_j))_{i,j=1}^N$ Steifigkeitsmatrix

ii) der Vektor $b = (\ell(\varphi_i))_{i=1}^N$ Lastvektor

In unserem Beispiel $(*)$ ist

$$a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \, d(x,y)$$

$$= \sum_{T_k} \int_{T_k} \underbrace{\nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j}_{\text{konstant auf } T_k} \, d(x,y)$$

$$= \sum_{\substack{T_k \text{ die } P_i \text{ oder } P_j \\ \text{enthalten}}} \int_{T_k} \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \, d(x,y)$$

Der i,j-te Eintrag von A ist 0 falls P_i und P_j nicht Eckpunkte eines gemeinsamen Dreiecks sind $\rightsquigarrow$ Die meisten Einträge von A sind 0 in den meisten Fällen. Man sagt, dass A dünn besetzt ist "sparse"

$$b_j = \ell(\varphi_j) = \int_\Omega f\cdot\varphi_j \, d(x,y)$$

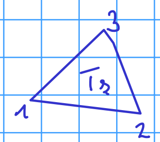
$$= \sum_{T_k \text{ die } p_j \text{ enthalten}} \int_{T_k} f\cdot\varphi_j \, d(x,y)$$

$$\approx \sum_{T_k \text{ die } p_j \text{ enthalten}} \sum_{i=1}^{s} f(c_i^{(k)})\, \varphi_j(c_i^{(k)})\, w_i^{(k)}$$

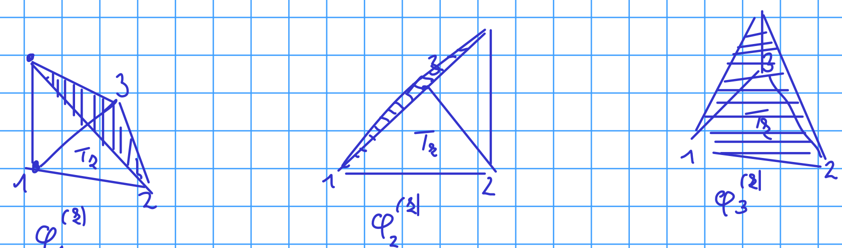
wobei $(c_j^{(k)}, w_j^{(k)})_{j=1}^{s}$ Knoten und Gewichte einer Quadraturformel auf T_k sind.

Organisation der Berechnung von A und b (Assemblierung der Steifigkeitsmatrix und des Lastvektors)

- Auf dem Dreieck T_k mit lokaler Nummerierung der Ecken

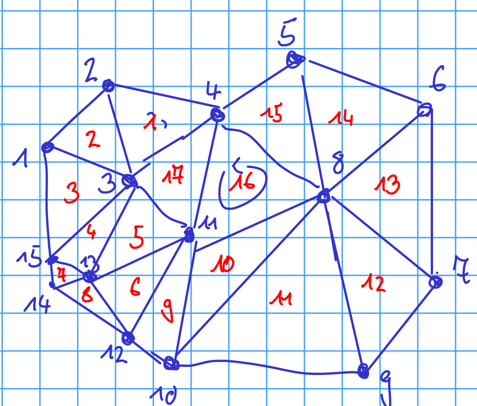


sind drei affin lineare Basisfunktionen $\varphi_1^{(k)}, \varphi_2^{(k)}, \varphi_3^{(k)}$ gegeben



Triangulierung von Ω (Ω Polygon)

$\rightsquigarrow$ globale Nummerierung der Eckpunkte
globale Nummerierung der Dreiecke

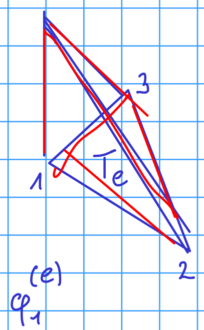


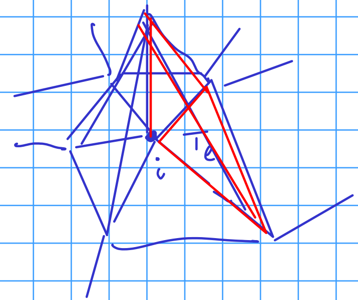
Dreieck 16 hat Eckpunkte $(11, 8, 4)$
(oder auch $(8, 4, 11)$
oder $(4, 8, 11)$)

$i^\ell(r)$ globale Nummerierung der Eckpunkte

$i^\ell(r)$ ist die Nummer des Eckpunkts mit der lokalen Nummer r im Dreieck ℓ, $r \in \{1,2,3\}$

Damit ist für $i = i^\ell(r)$ $\quad \varphi_i|_{T_\ell} = \varphi_r^{(\ell)}$





$i = i^e(1)$

φ_i

$$a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \int_\Omega \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, d(x,y)$$

$$a_{rs}^{(e)} := \int_{T_e} \underbrace{\nabla \varphi_r^{(e)}}_{\text{konstant}} \cdot \underbrace{\nabla \varphi_s^{(e)}} \, d(x,y) \quad \leftarrow$$

Algorithmus zum Aufstellen / Berechnen von A

$a_{ij} = 0 \quad \forall\, i,j = 1..N \qquad A = \text{sparse}(N,N)$

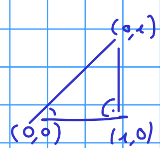
for $k = 1..K$ (alle Dreiecke)

for $r,s = 1..R$ (in unserem Beispiel $R = 3$)

$i = i^k(r)$

$j = i^k(s)$

$a_{ij} = a_{ij} + a_{rs}^{(k)}$



Berechnung des Lastvektors analog