MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
DR. CARSTEN FELDKAMP

15. DEZEMBER 2020

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Analysis II – 9. Übungsblatt

Aufgabe 21:

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2$. Bestimmen Sie die Maxima von f auf der Einheitskugel $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, \|x\|_2 \leq 1\}$.

Aufgabe 22:

Sei $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x_i > 0, i = 1, \ldots, n\}$ und $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}\ x \mapsto \prod_{i=1}^n x_i$.

(a) Bestimmen Sie die Extremwerte von f unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.

(b) Verwenden Sie Teil a), um folgende Ungleichung zu beweisen: Für $x \in \mathbb{R}^n_+$ gilt

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i.$$

Aufgabe 23:

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist bilinear, falls für $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$

(a) $f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y) = f(x, \alpha y)$

(b) $f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$

(c) $f(x, y + z) = f(x, y) + f(x, z)$

Zeigen Sie, dass für eine bilineare Funktion f gilt

(a) $\lim_{(h,k)\to 0} \frac{|f(h,k)|}{\|(h,k)\|} = 0$.

(b) $f'(a, b)(x, y) = f(a, y) + f(x, b)$.

Präsenzaufgabe 23:

Bestimmen und identifizieren Sie die lokalen Extrema der Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

(a) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \exp(-x^2 + y^2)$

(b) $g(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$.

Präsenzaufgabe 24:

Zeigen Sie, dass eine symmetrische 2×2 Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ genau dann positiv definit ist, wenn a und die Determinate von A positiv sind.

Präsenzaufgabe 25:

In der Vorlesung hatten wir gesehen, dass der Gradient senkrecht auf den Niveauflächen/Höhenlinien steht. Zeigen Sie, dass für ein $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, das in $x \in U$ differenzierbar ist, mit $\mathrm{grad} f(x) \neq 0$, der Gradient in Richtung des steilsten Anstiegs zeigt. (Hinweis: Cauchy Schwarz Ungleichung)

Abgabe der schriftlichen Aufgaben bis Dienstag, 22. Dezember, 8:00 Uhr via AUAS.
Besprechung der Präsenzaufgaben in den Übungen am 16. und 17. Dezember.