Mathematisches Institut

Prof. Dr. Achim Schädle
Dr. Carsten Feldkamp

8. Dezember 2020

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Analysis II – 8. Übungsblatt

Aufgabe 18: (6 Punkte)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \to \mathbb{R}^k$ einmal stetig differenzierbar und die Verbindungsstrecke $\overline{ax} := \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ y = ta + (1-t)x,\, t \in [0,1]\}$ von $a \in U$ zu $x \in U$ liege ganz in U. Zeigen Sie, dass

$$f(x) = f(a) + \int_0^1 f'(a + t(x-a))(x-a)dt.$$

Aufgabe 19:

Verwenden Sie Aufgabe 18, um den Schrankensatz zu beweisen:

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \to \mathbb{R}^k$ einmal stetig differenzierbar. Ist $K \subset U$ kompakt und konvex, so ist für $M = \sup_{x \in K} \|f'(x)\|_{2,2}$

$$\|f(y) - f(x)\|_2 \leq M \|x - y\|_2 \quad \forall x, y \in K.$$

Hier ist $\|A\|_{2,2} = \sup\{\|Ax\|_2 \ : \ \|x\|_2 = 1\}$ die von den $\|\cdot\|_2$ Normen induzierte Norm auf $\mathbb{R}^{k \times n}$.

Aufgabe 20:

Sei $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, y > 0\}$ und $f : U \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$. Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von f um den Punkt $a = \binom{1}{1}$ bis zur Ordnung 2, d.h. berechnen Sie $T_{f,a,2}$.

Präsenzaufgabe 20:

Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt wegzusammenhängend, falls es zu je zwei Elementen $a, b \in U$ eine stetige Kurve $\gamma : [0,1] \to U$ gibt mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$.

Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Wie kann man mit Hilfe des Mittelwertsatzes aus der Vorlesung (§17 Satz 1) zeigen, dass, falls U wegzusammenhängend ist und $f' = 0$ (die Nullabbildung), die Funktion f konstant ist?

Denken Sie sich ein Beispiel aus, das zeigt, dass der Mittelwertsatz (§17 Satz 1) aus der Vorlesung im Gegensatz zu Aufgabe 18 nicht für C^1-Funktionen $g : U \to \mathbb{R}^k$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, gilt.

Präsenzaufgabe 21:

Sei $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x,y) \mapsto xy$. Bringen Sie q in die Form

$$q(x,y) = (x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Wie sieht die Hessematrix aus und wie die Taylorentwicklung von q um Null? Berechnen Sie die Eigenwerte der Hessematrix in Null.

Präsenzaufgabe 22:

Sei B eine reelle $n \times n$ Matrix, $A = B^T B$. (Warum ist A eine symmetrische Matrix?) Wir setzen $\|B\|_{2,2} := \max_{\|x\|_2 = 1}\{\|Bx\|_2\}$. Zeigen Sie, dass $\|B\|_{2,2} = \sqrt{\lambda}$, wobei $\lambda \geq 0$ der größte Eigenwert von A ist.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben bis Dienstag, 15. Dezember, 8:00 Uhr via AUAS. Besprechung der Präsenzaufgaben in den Übungen am 9. und 10. Dezember.