Mathematisches Institut

Prof. Dr. Achim Schädle
Dr. Carsten Feldkamp

1. Dezember 2020

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Analysis II – 7. Übungsblatt

Aufgabe 15: (6 Punkte)

Berechnen Sie die Gradienten folgender Funktionen und skizzieren Sie das Gradientenfeld

(a) $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4$ im Bereich $-1 < x, y < 1$ und

(b) $g : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + (x-1)^2 + (y-1)^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + x^2 + y^2}}$ im Bereich $-1 < x, y < 2$.

Aufgabe 16: (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto f(x, y)$ gegeben als

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

zweimal partiell differenzierbar in $(0, 0)$ ist und berechnen Sie $D_1D_2f(0, 0)$ und $D_2D_1f(0, 0)$. Sind D_1D_2f und D_2D_1f stetig?

Aufgabe 17: (6 Punkte)

Für $m, n \in \mathbb{N}$ sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $x \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_2 = 1$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$. f heißt in x differenzierbar in Richtung v, falls

$$D_v f(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h}$$

exisitert.

(a) Zeigen Sie: Ist f in x (total) differenzierbar, so ist f in x in jede Richtung differenzierbar, und es gilt $D_v f(x) = f'(x)v$.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y)$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \text{ und } y = x^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)$ in jede Richtung differenzierbar, aber nicht stetig ist.

Präsenzaufgabe 17:

Berechnen Sie Bogenlänge der Kurve

$$N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^3\,, -1 \le x \le 1\}.$$

Präsenzaufgabe 18:

(a) Skizzieren Sie die Menge

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y^2 - x^3 - x^2 = 0\}$$

im Bereich $x \in (-2,3)$ und $y \in (-4,4)$.

(b) Berechnen Sie den Gradienten von

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ (x,y) \mapsto g(x,y) = y^2 - x^3 - x^2.$$

(c) Skizzieren Sie das Gradientenfeld $\operatorname{grad} g$ im Bereich $x \in (-2,3)$ und $y \in (-4,4)$.

Präsenzaufgabe 19:

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge.

Zeigen Sie, dass folgende Aussage äquivalent sind:

(a) $f : U \to \mathbb{R}^k$ ist in $x \in U$ differenzierbar.

(b) Es existiert $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ so, dass

$$\lim_{y\to x} \frac{f(y) - f(x) - A(y-x)}{\|y-x\|_2} = 0.$$

(c) Es existiert $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ so, dass für jede Folge $(x_m)_m$ in $U\backslash\{x\}$ mit $x_m \to x$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f(x_m) - f(x) - A(x_m - x)}{\|x_m - x\|_2} = 0.$$

Abgabe der schriftlichen Aufgaben bis Dienstag, 8. Dezember, 8:00 Uhr via AUAS.
Besprechung der Präsenzaufgaben in den Übungen am 2. und 3. Dezember.