Mathematisches Institut

Prof. Dr. Achim Schädle
Dr. Carsten Feldkamp

24. November 2020

Analysis II – 6. Übungsblatt

Aufgabe 12: (6 Punkte)

Es sei für $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen $f : D \to D$ eine Kontraktion, d.h. es gibt $q < 1$ so, dass für alle $x, y \in D$ $\|f(x) - f(y)\| \leq q\|x - y\|$ gilt. Zeigen Sie, dass für den Fixpunkt z von f und $x_0 \in D$ gilt

$$\|z - x_k\| \leq \frac{q^k}{1-q}\|x_0 - x_1\|,$$

wenn man für $k \in \mathbb{N}$ $x_k = f(x_{k-1})$ setzt.

Hinweis: Die Existenz und Eindeutigkeit des Fixpunktes wird unten in Präsenzaufgabe 14 gezeigt.

Aufgabe 13: (6 Punkte) (Babylonisches Wurzelziehen)

Sei

$$f : [1, a] \to \mathbb{R}\ x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

Zeigen Sie, dass $\sqrt{a}$ ein Fixpunkt von f ist und berechnen Sie $\sqrt{2}$ mit einer Genauigkeit von mindestens 10^{-3}, ohne dabei den Wert von $\sqrt{2}$ zu verwenden.

Hinweis: Sie können dafür das Ergebnis aus Aufgabe 12 verwenden, ohne, dass Sie diese lösen.

Aufgabe 14: (6 Punkte)

Eine Bilinearform $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$a(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j \text{ für } a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

heißt positiv definit, falls

$$a(x, x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Zeigen Sie, dass zu einer positiv definiten Bilinearform a ein $\alpha > 0$ existiert mit

$$a(x, x) \geq \alpha\|x\|_2^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Präsenzaufgabe 14:

Beweisen Sie folgende Aussage:

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Gilt

(a) D ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$,

(b) $f(D) \subseteq D$ (das Bild von D unter f liegt in D) und

(c) für ein $q < 1$ ist $\|f(x) - f(y)\| < q\|x - y\|$ für alle $x, y \in D$,

so hat f genau einen Fixpunkt in D.

Zusatz: Kann man auf eine der drei Voraussetzungen (D abgeschlossen, f Selbstabbildung und Kontraktion) verzichten?

Präsenzaufgabe 15:

Ist die Hintereinanderausführung zweier gleichmäßig stetiger Funktionen wieder gleichmäßig stetig?

Präsenzaufgabe 16:

Ist die Menge der orthogonalen Matrizen im Vektorraum $\mathbb{R}^{n\times n}$ kompakt? Warum ist diese Frage überhaupt sinnvoll, ohne eine Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ anzugeben?

Abgabe der schriftlichen Aufgaben bis Dienstag, 1. Dezember, 8:00 Uhr via AUAS.
Besprechung der Präsenzaufgaben in den Übungen am 25. und 26. November.