Mathematisches Institut

Prof. Dr. Achim Schädle
Dr. Carsten Feldkamp

17. November 2020

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Analysis II – 5. Übungsblatt

Aufgabe 9: (6 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine Matrix. Wir setzen

$$\|A\|_2 := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n,m} |a_{ij}|^2}$$

(Diese Norm heißt Frobenius-Norm)

(a) Zeigen Sie, dass $\| \; \|_2$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum der $n \times m$ Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$ ist.

(b) Sei $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ eine $m \times k$ Matrix. Zeigen Sie, dass dann

$$\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$$

gilt.

Hierbei sind für die $n \times k$ Matrix AB und die $m \times k$ Matrix B die Normen $\|AB\|_2$ und $\|B\|_2$ ebenfalls als Wurzel aus der Summe der Quadrate der Einträge gegeben.

Aufgabe 10: (6 Punkte)

Für eine nichtleere Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ setzt man für $x \in \mathbb{R}^n$

$$d(x, A) := \inf\{\|x - y\|_2 \, : \, y \in A\}$$

den Abstand von x zur Menge A. Zeigen Sie:

(a) $d(\cdot, A) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $x \mapsto d(x, A)$ ist stetig, sogar Lipschitzstetig.

(b) $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$.

Aufgabe 11: (6 Punkte)

Für die normierten Vektorräume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind

(a) f ist stetig.

(b) Für jede in $\mathbb{R}^m$ abgeschlossene Menge A ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$.

Präsenzaufgabe 11:

(a) Geben Sie ein Beispiel an welches zeigt, dass in $(\mathbb{R}, | \; |)$ der Schnitt unendlich vieler offener Mengen nicht unbedingt wieder offen sein muss.

(b) Wie sieht es mit der Vereinigung endlich bzw. unendlich vieler abgeschlossener Mengen in $(\mathbb{R}, | \; |)$ aus?

(c) Stetige Bilder offener bzw. abgeschlossener Mengen sind im Allgemeinen nicht wieder offen bzw. abgeschlossen. Überlegen Sie sich je ein Beispiel dazu.

(d) Es sei in $(\mathbb{R}^2, \| \ \|_2)$ die Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(1/x), x \in (0,1]\}$ gegeben. Bestimmen Sie $\overline{M}$.

Präsenzaufgabe 12:

(a) Überlegen Sie sich Normen, sodass der Vektorraum der stetigen Funktionen auf $[0,1]$ vollständig bzw. nicht vollständig ist. In der Vorlesung gab es mehrere Beispiele von Normen.

(b) Definieren/Finden Sie eine Norm auf dem Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen auf $[0,1]$, sodass dieser vollständig ist.

(c) Ist der Vektorraum der Polynome auf $[0,1]$ bezüglich der Supremumsnorm vollständig?

(d) Ist der Vektorraum der Polynome bis Polynomgrad 10 bezüglich der Supremumsnorm vollständig?

Präsenzaufgabe 13:

Warum ist die Menge der reellen Zahlen keine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$?

Sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$ die gegen a konvergiert.

(a) Ist $M := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$?

(b) Ist $N := \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$?

Abgabe der schriftlichen Aufgaben bis Dienstag, 24. November, 8:00 Uhr via AUAS.
Besprechung der Präsenzaufgaben in den Übungen am 18. und 19. November.