Mathematisches Institut

Prof. Dr. Achim Schädle
Dr. Carsten Feldkamp

10. November 2020

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Analysis II – 4. Übungsblatt

Zu einer gegebenen Menge X bezeichnet man eine Teilmenge $\mathcal{O} \subset P(X)$ der Potenzmenge $P(X)$ von X als Topologie und $(X, \mathcal{O})$ als topologischen Raum, falls

(a) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$, (die leere Menge und X selbst ist in $\mathcal{O}$)

(b) $U_i \in \mathcal{O}$ für $i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$ (jede beliebige Vereinigung von Mengen in $\mathcal{O}$ ist in $\mathcal{O}$) und

(c) $U_1, U_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$ (der endliche Schnitt von Mengen in $\mathcal{O}$ ist in $\mathcal{O}$).

Das sind genau die Eigenschaften offener Mengen aus (13.2) Lemma 1. Die Elemente von $\mathcal{O}$ bezeichnet man als offene Mengen.

Eine Topologie auf X heißt Hausdorffsch, falls es für $x, y \in X$ mit $x \neq y$ offenen Umgebungen U und V von x bzw. y gibt (d.h. $x \in U$, $y \in V$ und $U, V \in \mathcal{O}$), so, dass $U \cap V = \emptyset$. Man sagt, die Topologie trennt Punkte.

Präsenzaufgabe 9:

Sei nun (X, d) ein metrischer Raum. Durch die Metrik d werden durch (13.2) Definition 1 offene Mengen definiert, die die sogenannte durch die Metrik induzierte Topologie bilden.

(a) Zeigen Sie, dass diese induzierte Topologie die Hausdorffeigenschaft hat.

(b) Konvergenz von Folgen in topologischen Räumen läßt sich wie für metrische Räume definieren. Wie? Zeigen Sie, dass in topologischen Räumen, die Hausdorffsch sind, die Grenzwerte konvergenter Folgen eindeutig sind.

Präsenzaufgabe 10:

Wir definieren $H_a := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ für $a \in \mathbb{R}$, $H_\infty := \mathbb{R}$ und $H_{-\infty} = \emptyset$. Zeigen Sie, dass $\{H_a \ : \ a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\}$ eine Topologie auf $\mathbb{R}$ ist. Ist diese Topologie Hausdorffsch?

Aufgabe 8: (6 Punkte) Hamming Metrik

Es sei $A = \{a_1, a_2, \dots, a_M\}$ ein endliches Alphabet. Auf den Codes $x = (x_1, \dots, x_N)$ der Länge N, mit $x_n \in A$ für $n = 1, \dots, N$, defniert man $d : A^N \times A^N \to \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto d(x, y)$ durch

$$d(x, y) := \text{Anzahl der Elemente in} \{n \in \{1, \dots, N\} \ : \ x_n \neq y_n\} := |\{n \in \{1, \dots, N\} \ : \ x_n \neq y_n\}|.$$

Zeigen Sie, dass dadurch eine Metrik auf dem Coderaum definiert wird.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben bis Dienstag, 17. November, 8:00 Uhr via AUAS.
Besprechung der Präsenzaufgaben in den Übungen am 11. und 12. November.