MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
DR. CARSTEN FELDKAMP

6. NOVEMBER 2020

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Analysis II – 3. Übungsblatt

Aufgabe 6: (6 Punkte)

Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $p \in [1, \infty)$ sei

$$||x||_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Zeigen Sie:

(a) $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)$ ist ein normierter Raum.

(b) Für $p \leq q$ gilt $||x||_q \leq ||x||_p$

Aufgabe 7: (6 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Bolzona-Weierstraß aus der Analysis 1, dass jede beschränkte Folge in $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_2)$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

Hinweis: In Analysis 1 wurde gezeigt (Bolzano-Weierstraß): Jede beschränkte Folge in $(\mathbb{R}, | \ |)$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Präsenzaufgabe 7:

Für $x \in \mathbb{R}^n$ wurden in der Vorlesung

(a) $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$, (b) $\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, (c) $\|x\|_\infty := \max_{i=1}^n |x_i|$

defininiert. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_1)$, $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_2)$ und $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ normierte Vektorräume sind.

Gibt es ein Skalarprodukt, dass die $\| \ \|_\infty$ - Norm induziert?

Präsenzaufgabe 8:

Für einen metrischen Raum (X, d) setzt man

$$d' : X \times X \to \mathbb{R} \ (x, y) \mapsto \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

Zeigen Sie, dass dann (X, d') ebenfalls ein metrischer Raum ist und, dass (X, d) und (X, d') äquivalent sind.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben bis Freitag, 13. November, 8:00 Uhr via AUAS.
Besprechung der Präsenzaufgaben in den Übungen am 11. und 12. November.
Ab dem 10. November gibt es das neue Übungsblatt dienstags und die Abgabe wird ebenfalls auf Dienstag verlegt.