MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
DR. CARSTEN FELDKAMP

9. FEBRUAR 2021

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Analysis II – 15. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 44:

Auf $\mathbb{R}^{m\times m}$ betrachten wir die durch die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^m$ induzierte Norm

$$\|A\| := \sup_{\|x\|_2=1} \{\|Ax\|_2\}.$$

Sei nun $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Zeigen Sie, dass Konstanten C und μ existieren, so dass für alle $t \geq 0$

$$\|\mathrm{e}^{tA}\| \leq C\mathrm{e}^{\mu t}$$

gilt. Was ist das kleinstmögliche μ in dieser Ungleichung?

Präsenzaufgabe 45:

Im Folgenden ist $\mathbb{R}^n$ mit der üblichen Norm ausgestattet, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist offen.

[wahr | falsch]

Fragenblock:

1. Jede partiell differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ ist in jedem $x \in D$ lokal lipschitzstetig. [|]
2. Jede einmal stetig differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ ist in jedem $x \in D$ lokal lipschitzstetig. [|]
3. Ist $0 \in D$, $||x_0|| \leq \frac{1}{2}$ und $\Phi : D \to D$ global lipschitzstetig, so konvergiert die Folge $x_{n+1} := \Phi(x_n)$. [|]
4. Ist für eine lineare Differentialgleichung die konstante Funktion $y \equiv 0$ eine Lösung, so ist 0 stabil. [|]
5. Die Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung mit Anfangswert $y_0 = 0$ ist immer beschränkt. [|]
6. Die Lösung einer linearen autonomen Differentialgleichung mit Anfangswert $y_0 = 0$ ist immer beschränkt. [|]
7. Die Lösung des Anfangswertproblems $iu'(t) = |u(t)|^2 u(t);\ u(0) = 1$ ist durch $t \mapsto \mathrm{e}^{i|c|^2 t}$ gegeben. Hierbei ist i die imaginäre Einheit, $c \in \mathbb{C}$ und $|c|^2 = c\bar{c}$ der Betrag auf $\mathbb{C}$. [|]
8. Die Lösung des Anfangswertproblems $u'(t) = \sin(t);\ u(0) = 1$ ist durch $t \mapsto -\cos(t)$ gegeben. [|]

Besprechung der Präsenzaufgaben in den Übungen am 11. und 12. Februar.