MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
DR. CARSTEN FELDKAMP

2. FEBRUAR 2021

Analysis II – 14. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 40:

In Präsenzaufgabe 37 wurde die Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 4y^{(3)} + 5y'' + 4y' + 4y = 0$$

untersucht.

Für die Anfangswerte $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = -2$ und $y^{(3)}(0) = 1$ erhält man eine periodische Lösung.

Für welche Anfangsbedingungen zum Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$ erhält man auf $[0, \infty)$ beschränkte Lösungen?

Präsenzaufgabe 41:

(a) Bestimmen Sie zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ die Taylorreihe der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 1$.

(b) Sei $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Geben Sie eine Metrik auf X an.

(c) Wir betrachten den metrischen Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

- Geben Sie eine Menge von offenen Mengen an, deren Schnitt abgeschlossen aber nicht leer ist.
- Geben Sie eine abgschlossene Menge an, die nicht kompakt ist.
- Geben Sie eine nichtleere Menge an, die abgeschlossen und offen ist.

(d) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lipschitzstetige Funktion und $a, b \in \mathbb{R}$. Gesucht ist x so, dass $x = a+bf(x+a)$ gilt. Geben Sie eine Funktion F an, so dass x ein Fixpunkt von F ist. Können Sie Bedingungen an a und b formulieren, so, dass die durch $x_{n+1} = F(x_n)$ definierte Folge gegen x konvergiert?

(e) Berechnen Sie die maximale Länge des Weges, die Asterix und Obelix laufen müssen, um in Aufgabe 33 den Römer zu treffen.

Präsenzaufgabe 42:

[wahr | falsch]

Fragenblock:

1. Auf jeder Menge X kann man eine Metrik definieren. [|]
2. Auf dem Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner gleich 10 sind je zwei Normen äquivalent [|]
3. In $(\mathbb{R}, |\,|)$ ist die Menge $\{\frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}\}$ kompakt [|]
4. Jede differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ist partiell differenzierbar. [|]
5. Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar, so ist die Hessematrix von f symmetrisch. [|]

6. Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}(x,y) \mapsto \cos(x\sin(y))$, so ist die Hessematrix von f an der Stelle (x,y) gegeben durch [|]
$$\begin{bmatrix} \sin^2(y)\cos(x\sin(y)) & -(x\sin(y)\cos(x\sin(y)) - \sin(x\sin(y)))\cos(y) \\ -(x\sin(y)\cos(x\sin(y)) - \sin(x\sin(y)))\cos(y) & -x^2\cos^2(y)\cos(x\sin(y)) + x\sin(y)\sin(x\sin(y)) \end{bmatrix}.$$

Präsenzaufgabe 43:

Im Beweis des folgenden Satzes befinden sich ein paar Fehler. Finden Sie diese.

Satz 1 (Banach'scher Fixpunktsatz)**.** *Seien (X,d) ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum und $T : X \to X$ eine Kontraktion, d.h.*

$$\exists \kappa \in [0,1)\,\forall x,y \in X : \ d(T(x),T(y)) \le \kappa d(x,y).$$

Dann hat T einen eindeutigen Fixpunkt, d.h. es gibt genau ein $\hat{x} \in X$ so, dass $T(\hat{x}) = \hat{x}$.

Beweis: Für $x_0 \in X$ definieren wir rekursiv für $m \in \mathbb{N}$: $x_m = T(x_{m-1})$.

Die Glieder der Folge $(x_m)_m \subseteq X$ erfüllen für $p \in \mathbb{N}$

$$d(x_{p+1},x_1) = d(T(x_p),T(x_0)) \le \kappa d(x_p,x_0).$$

Mit Induktion über m folgt

$$d(x_{p+m},x_m) \le \kappa^m d(x_p,x_1) \quad (m,p \in \mathbb{N}).$$

Weiter folgt mit der Dreiecksungleichung und dem eben Bewiesenen für $p=1$,

$$d(x_\ell,x_0) \le \sum_{j=1}^{\ell} d(x_j,x_{j-1}) \le \sum_{j=1}^{\infty} \kappa^{j-1} d(x_1,x_0) = \left(\frac{1}{1-\kappa} - 1\right) d(x_1,x_0) \quad (\ell \in \mathbb{N}).$$

Insgesamt erhält man

$$d(x_{m+p},x_m) \le \kappa^m d(x_p,x_0) \le \frac{\kappa^m}{1-\kappa} d(x_1,x_0) \to 0 \quad (m \to \infty),$$

unabhängig von $p \in \mathbb{N}$.

Damit ist $(x_m)_m$ eine Cauchy-Folge und konvergiert wegen der Abgeschlossenheit von X gegen ein $\hat{x} \in X$.

Weiter folgt

$$\begin{aligned} d(\hat{x},T(\hat{x})) &\le d(\hat{x},x_m) + d(x_m,T(\hat{x})) \\ &= d(\hat{x},x_m) + d(T(x_{m-1}),T(\hat{x})) \\ &\le d(\hat{x},x_m) + \kappa d(x_m,\hat{x}) \to 0 \quad (m \to \infty), \end{aligned}$$

also gilt $T(\hat{x}) = \hat{x}$.

Eindeutigkeit:

Sei $z \in X$ ein weiterer Fixpunkt, dann ist

$$d(\hat{x},z) = d(T(\hat{x}),T(z)) \le \kappa d(\hat{x},z).$$

Da diese Ungleichung nur für $d(\hat{x},z) = 0$ erfüllt werden kann, folgt $\hat{x} = z$. Also ist der Fixpunkt $\hat{x}$ eindeutig.

□

Besprechung der Präsenzaufgaben in den Übungen am 3. und 4. Februar.