MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
DR. CARSTEN FELDKAMP

26. JANUAR 2021

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Analysis II – 13. Übungsblatt

Aufgabe 35:

(a) Zeigen Sie: Für zwei kommutierende Matrizen A, B (d.h. $AB = BA$) gilt

$$\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB} = \mathrm{e}^{t(A+B)}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie: Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Abbildung $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ beliebig oft differenzierbar.

Aufgabe 36:

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'(t) = t\sin(y(t))$$

(a) Zeigen Sie, dass jede maximale Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

(b) Aufgrund eines Messfehlers wird statt der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ die Bedingung $y(0) = z_0$ gestellt. Wie groß darf jeweils der Messfehler $|y_0 - z_0|$ höchstens sein, damit der Fehler in der Lösung der Differentialgleichung zu den Zeiten $t = 1$, $t = 2$ und $t = 3$ höchstens e^{-3} beträgt?

Aufgabe 37:

Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem für das folgende System von gewöhnlichen Diffferentialgleichungen

$$y' = Ay \quad \text{für } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Die Lösungen sind von der Form $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}(u + tv)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $u, v \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 38:

Es sei $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + 2y^2 \leq 1\}$ und $f : E \to \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto xy$

(a) Zeigen Sie, dass f auf E ein Maximum und ein Minimum hat. (Kurze Begründung reicht).

(b) Begründen Sie, warum die Extremwerte nicht im Inneren von E, dh in der offenen Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + 2y^2 < 1\}$ liegen.

(c) Berechnen die Extremalstellen und die jeweiligen Extremalwerte.

Präsenzaufgabe 36:

Zeigen Sie: Gilt für zwei quadratische Matrizen A, B und alle $t \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB} = \mathrm{e}^{t(A+B)},$$

so kommutieren die Matrizen A und B (d. h. $AB = BA$).

Bem.: Das ist die Rückrichtung von Aufgabe 35 (a).

Präsenzaufgabe 37:

Transformieren Sie die Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 4y^{(3)} + 5y'' + 4y' + 4y = 0$$

in ein äquivaltentes System erster Ordnung.

Wie verhält sich die Lösung zum Anfangswert $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = -2$ und $y^{(3)}(0) = 1$?

Präsenzaufgabe 38:

Berechnen Sie e^{tA} für folgende Matrizen:

(a) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Präsenzaufgabe 39:

(a) Bestimmen Sie ein komplexes und anschließend ein reelles Fundamentalsystem für das folgende System von gewöhnlichen Diffferentialgleichungen

$$y' = Ay \quad \text{für } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Hinweis: A ist über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

(b) Es sei v ein Eigenvektor der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $\mathrm{e}^{tA}v$. Eventuell ist $v \in \mathbb{C}^n$, was aber unproblematisch ist, wenn man $\mathbb{R}^n$ als Teilmenge von $\mathbb{C}^n$ betrachtet.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben bis Dienstag, 2. Februar, 8:00 Uhr via AUAS.
Besprechung der Präsenzaufgaben in den Übungen am 27. und 28. Januar.