MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
DR. CARSTEN FELDKAMP

12. JANUAR 2021

Heinrich Heine
Universität
Düsseldorf

Analysis II – 11. Übungsblatt

Aufgabe 27:

Gegeben sei die Differentialgleichung $ty'(t) + 2y(t) = 4t^2$.

(a) Bestimmen sie deren Lösungen bis auf einen Parameter $c \in \mathbb{R}$. Existieren die Lösungen für alle $t \in \mathbb{R}$? Sind sie eindeutig?

(b) Skizzieren sie für verschiedene Parameter c das Verhalten der Lösung in der $t - y$ Ebene.

(c) Wie verhalten sich die beiden Lösungen zu den Anfangswerten $y(1) = 1$ und $y(1) = 2$ für $t \to 0$?

Aufgabe 28:

Wir betrachten zwei Modelle:

Modell 1 In einem Rosenbeet leben Marienkäfer x und Blattläuse y. Die Marienkäfer fressen die Blattläuse und die Blattläuse ernähren sich von Rosen, die in unbegrenztem Umfang zur Verfügung stehen.

Modell 2 Zwei Populationen x und y, die unabhängig voneinander existieren, treten in Konkurrenz und schädigen sich gegenseitig.

(a) Welches der beiden Differentialgleichungssysteme beschreibt welches Modell?

System 1 $x'(t) = x(t)(1 - y(t)),\ y'(t) = y(t)(1 - (x(t)).$

System 2 $x'(t) = -x(t)(1 - y(t)),\ y'(t) = y(t)(1 - (x(t)).$

(b) Skizzieren sie zu beiden Systemen das Vektorfeld im Phasenraum. ($x - y$ Ebene)

(c) Welche Bedeutung haben Nullstellen der Vektorfelder?

Aufgabe 29:

Zeigen sie folgende Verallgemeinerung des Banachschen Fixpunktsatzes:

Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : X \to X$ eine stetige Abbildung, derart, dass für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und $c \in [0, 1)$ gilt, dass für alle $x, y \in X$ gilt: $d(T^{n_0}(x), T^{n_0}(y)) \leq cd(x, y)$, so besitzt$T$ genau einen Fixpunkt. (T^{n_0} bezeichnet die n_0 fache Hintereinanderausführung der Abbildung T)

Hinweis: Wenden sie den Banachschen Fixpunktsatz zuerst auf $S := T^{n_0}$ an, und zeigen sie dann, dass der Fixpunkt von S auch ein Fixpunkt von T ist.

Aufgabe 30:

Bestimmen sie für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Ableitung von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ x \mapsto x^T Ax$.

Präsenzaufgabe 29:

Wir betrachten die Differentialgleichung $y'(t) = \inf\{t, y(t)\}$.

(a) Skizzieren sie das Richtungsfeld in der $t - y$ Ebene.

(b) Bestimmen sie die Lösungen.

Präsenzaufgabe 30:

Bestimmen sie die Lösungen der Differentialgleichungen:

(a) $y'(t) = -2y(t) + t$.

(b) $y'(t) = \sin(t)y(t) + \sin(t)$.

(c) $t(y(t)^2 + 1) + y(t)(t^2 + 1)y'(t) = 0$

Präsenzaufgabe 31:

	wahr	falsch
Fragenblock:		
1. Der Schnitt zweier offener Mengen ist offen.		
2. Die Vereinigung zweier offener Menge ist offen.		
3. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist für alle $x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$.		
4. Ist $(X, \\| \\|)$ ein normierter Raum, so ist für alle $x, y, z \in X \quad \\|x - y\\| + \\|y - z\\| = \\|x + z\\|$.		
5. Jede Cauchyfolge in einem metrischen Raum (X, d) ist beschränkt		

Im Folgenden ist $\mathbb{R}^n$ ein normierter Vektorraum. Offenheit, Stetigkeit und Differenzierbarkeit usw. werden über diese Norm definniert.

	wahr	falsch
Fragenblock:		
6. Die Jacobi-Matrix einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist symmetrisch.		
7. Die Hesse-Matrix einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist symmetrisch.		
8. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so ist $f(K)$ abgeschlossen.		
9. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, so ist $f(U)$ ebenfalls offen.		
10. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(\mathbb{R}^n, \\| \\|)$, so ist $\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ kompakt.		

Abgabe der schriftlichen Aufgaben bis Dienstag, 19. Januar, 8:00 Uhr via AUAS.
Besprechung der Präsenzaufgaben in den Übungen am 13. und 14. Januar.