Mathematisches Institut

Prof. Dr. Achim Schädle
Dr. Carsten Feldkamp

22. Dezember 2020

Analysis II – 10. Übungsblatt

Aufgabe 24:

Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x,y) = y^5 \mathrm{e}^y - (2x^3+3)\sin(y) + y^2x^2 - x\cos(x) = 0$ in einer Umgebung der Null eindeutig durch eine Funktion $y = g(x)$ aufgelöst werden kann. Bestimmen Sie $g'(0)$.

Aufgabe 25:

Zeigen Sie: Für jedes $r \in (-1,1)$ ist das Integral $\int_0^\pi \log(1 - 2r\cos(t) + r^2)dt$ gleich 0.

Hinweis: Differentiation unter dem Integral. Es bietet sich an im Komplexen zu rechnen, und den Term $1 - 2r\cos(t) + r^2 = (1 - r\mathrm{e}^{it})(1 - r\mathrm{e}^{-it})$ zu faktorisieren. Mit einer Partialbruchzerlegung läßt sich dann das Integral leichter berechnen.

Aufgabe 26:

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > b > 1$. Finden Sie ein geeignetes Intervall $D \subset \mathbb{R}_+$ derart, dass für $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{a + \frac{b}{x}}$ die Einschränkung $f|_D$ eine Kontraktion ist.

Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen der Funktion $x \mapsto x^3 - ax - b$.

Hinweis: Um die Kontraktionseigenschaft zu zeigen, kann man den Mittelwertsatz verwenden. Der Zwischenwertsatz ist auch nützlich.

Präsenzaufgabe 26:

Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks mit vorgegebenem Umfang l, das den größten Flächeninhalt hat.

Präsenzaufgabe 27:

Ein Problem in der Bildverarbeitung ist die flächenmäßig kleinste Ellipse zu finden, die eine Menge von n vorgegebenen Punkten $p_1, \dots p_n \in \mathbb{R}^2$ enthält.

Hier soll ein etwas einfacheres Problem gelöst werden, das Abschnitt 4.1 aus dem Artikel DOI: 10.1090/mcom/3497 entnommen ist:

Es sei für $a, b > 0$ $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ eine positiv definite Matrix. Für $z \in \mathbb{R}^2$ beschreibt die Menge

$$E_{M,z} := \{x \in \mathbb{R}^2 : (x-z)^T M (x-z) \le 1\}$$

eine achsenparallele Ellipse mit Zentrum z. Deren Flächeninhalt ist durch $A = \frac{\pi}{ab}$ gegeben.

Gesucht ist eine flächenmäßig möglichst kleine Ellipse mit Zentrum $z = (1,0)$, deren Rand die positive x_1-Achse in $(2,0)$ schneidet und die vorgegebenen Punkte $p^{(j)} = (p_1^{(j)}, p_2^{(j)}) \in \mathbb{R}^2$ mit $p_1^{(j)} \le 0$ für $j = 1, \dots, n$ enthält.

Überlegen Sie sich, wie man dieses Problem so formulieren kann, dass es einfach lösbar ist. (Das geht in diesem Fall ohne zu differenzieren.)

Hinweis: Um sich den Artikel anzusehen, müssen Sie eventuell eine vpn Verbindung zur Uni aufbauen.

Präsenzaufgabe 28: (Wiederholung Analysis 1)

(a) Zeigen Sie, dass die einzige stetige differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die $f'(t) = f(t)$ und $f(0) \neq 0$ erfüllt, die Exponentialfunktion ist.

(b) Zeigen Sie, dass die einzige stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die $f(t+s) = f(t)f(s)$ und $f(0) \neq 0$ erfüllt, die Exponentialfunktion ist.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben bis Dienstag, 12. Januar, 8:00 Uhr via AUAS.
Besprechung der Präsenzaufgaben in den Übungen am 6. und 7. Januar.