MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
DR. CARSTEN FELDKAMP

27. OKTOBER 2020

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Analysis II – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Es sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Weiter sei $f : [a, b] \to [0, \infty)$ eine stetige Funktion mit $\int_a^b f = 0$. Zeigen Sie, dass $f = 0$ ist.

Aufgabe 2: (2+2+2 Punkte)

Für $a > 0$ sei $h : (-a, a) \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $f : (-a, a) \to \mathbb{R}\ x \mapsto x \cdot h(x)$ ist stetig in $x_0 = 0$.

(b) Finden Sie ein Gegenbeispiel, das zeigt, dass die Funktion f nicht unbedingt differenzierbar in $x_0 = 0$ ist.

(c) Die Funktion $g : (-a, a) \to \mathbb{R}\ x \mapsto x^2 \cdot h(x)$ ist differenzierbar in $x_0 = 0$.

Präsenzaufgabe 1:

Warum ist die Funktion

$$f \ : \ (0, \infty) \to \mathbb{R}\ x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$$

differenzierbar? Bestimmen Sie die Ableitung von f.

Präsenzaufgabe 2:

(a) Berechnen Sie mit Hilfe partieller Integration das Integral $\int_1^4 x \ln(x) dx$.

(b) Berechnen Sit mit Hilfe der Substitutionsregel das Integral $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

Präsenzaufgabe 3:

Verwenden Sie die Regel von L'Hospital (Analysis Blatt 10, Aufgabe 33) zur Berechnung des Grenzwertes:

$$\lim_{x\to\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Regel von L'Hospital: Seien $f, g \ : \ (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Falls $\lim_{x\searrow a} f(x) = \lim_{x\searrow a} g(x) = 0$ und $\lim_{x\searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann existiert auch $\lim_{x\searrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim_{x\searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Abgabe der schriftlichen Übungsaufgaben bis Freitag, 30. Oktober, 8:00 Uhr in AUAS.
Besprechung der Präsenzaufgaben in den Übungen am 28. und 29. Oktober.