Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

03.12.2019

35	36	37	38	39	Σ

NAME: ______________

MAT-NR.: ______________

GRUPPE: ______________

Numerik II – 9. Übungsblatt

Aufgabe 35:

Betrachten Sie das Problem $\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)$ für das Polynom

$$f(x) = (x_1^2 - x_2)(x_1^2 - 2x_2).$$

(a) Zeigen Sie: Für jede Richtung $d \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\ 0\ \}$ hat die Funktion $\lambda \mapsto f(\lambda d)$ in $\lambda^* = 0$ eine strikte lokale Minimalstelle und es gilt $\lim_{|\lambda|\to\infty} f(\lambda d) = \infty$.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie: Der Punkt $x^* = 0$ ist eine Minimalstelle von f.

(c) Zeigen oder widerlegen Sie: $\lim_{\|x\|_2\to\infty} f(x) = \infty$.

Aufgabe 36:

Sei $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Dann ist für $x, y \in \mathbb{R}^n$ durch $\langle x, y\rangle_H := x^T H y$ ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert, welches die Norm $\|x\|_H$ induziert.

Sei eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\nabla f(x) \neq 0$ gegeben. Bestimmen Sie eine Lösung des Problems

$$\min_{d:\|d\|_H=1} \nabla f(x)^T d.$$

Warum ist damit Satz 3.6 der Vorlesung bewiesen?

Aufgabe 37:

Zeigen Sie: Falls $0 < c_2 < c_1 < 1$ gilt, kann es sein, dass es für eine Abstiegsrichtung $s \in \mathbb{R}^n$ mit $\|s\|_2 = 1$ einer nach unten beschränkten Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ keine Schrittlänge $\alpha > 0$ gibt, die die Wolfebedingung erfüllt.

Aufgabe 38:

Betrachten Sie eine symmetrische und positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ und das quadratische Funktional $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$. Des Weiteren seien $x, s \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\nabla f(x)^T s < 0$. Zeigen Sie, dass es c_1 und c_2 gibt, sodass $0 < c_1 \leq c_2 < 1$ gilt und für diese die Minimalstelle α^* von $\varphi(\alpha) = f(x + \alpha s)$ die Wolfe-Bedingungen erfüllt.

b.w.

Aufgabe 39:

(a) Implementieren Sie das Verfahren des steilsten Abstiegs zur iterativen Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit und $b \in \mathbb{R}^n$ durch die Minimierung des quadratischen Funktionals $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$. Verwenden Sie dazu die exakten Schrittweiten α_k aus der Vorlesung und brechen Sie den Iteration ab, falls die Norm des Gradienten kleiner als TOL ist.

(b) Testen Sie Ihre Implementierung für eine geeignete (2×2)-Matrix A und einen geeigneten Vektor b. Stellen Sie die Funktion $f(x)$ grafisch dar und zeichnen Sie den Verlauf der Iterierten ein.

(c) Testen Sie Ihre Implementierung nun auch mit der Matrix aus Kapitel (1.5.A) und $b = [1, 1, \ldots]^T$. Stellen Sie für jedes $N = M = 5, 10, 20$ den Verlauf der Fehler der Iterierten graphisch dar. Setzen Sie hierbei die Toleranz TOL auf 10^{-8}.

Abgabe der Übungsaufgaben am Dienstag, 10.12.2019 zu Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Dienstag, 10.12.2019, 8:30 Uhr an *marina.fischer@uni-duesseldorf.de*.