Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

26.11.2019

31	32	33	34	Σ

NAME: ____________

MAT-NR.: ____________

GRUPPE: ____________

Numerik II – 8. Übungsblatt

Aufgabe 31:

Sei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \overline{\beta}_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & \\ & \overline{\beta}_3 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \beta_n \\ & & & \overline{\beta}_n & \alpha_n \end{pmatrix}$$

eine hermitesche tridiagonale Matrix mit $\beta_i \neq 0$ für $i = 2, \dots, n$ und $\alpha_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$.
Zeigen Sie: Setzt man

$$A_1 = (\alpha_1), \quad A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 \\ \overline{\beta}_2 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & \\ \overline{\beta}_2 & \alpha_2 & \beta_3 \\ & \overline{\beta}_3 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \text{usw.}$$

und definiert $p_k(\lambda) := \det(A_k - \lambda I)$ und $p_0(\lambda) := 1$, so erhält man die folgende Rekursion

$$\begin{aligned} p_1(\lambda) &= \alpha_1 - \lambda \\ p_k(\lambda) &= (\alpha_k - \lambda)p_{k-1}(\lambda) - |\beta_k|^2 p_{k-2}(\lambda) \quad \text{für} \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Aufgabe 32:

Zeigen Sie, dass für die $p_n(\lambda)$ aus Aufgabe 31 und $\widehat{\lambda} \in \mathbb{R}$ gilt

(a) $p_n'(\widehat{\lambda})\, p_{n-1}(\widehat{\lambda}) < 0$, falls $p_n(\widehat{\lambda}) = 0$;

(b) $p_{k-1}(\widehat{\lambda})\, p_{k+1}(\widehat{\lambda}) < 0$, falls $p_k(\widehat{\lambda}) = 0$ für ein $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Hinweis: Zeigen Sie für (a), dass die Nullstellen von p_k reell und einfach sind und die Nullstellen von p_{k-1} trennen. Hierfür ist (b) nützlich.

Aufgabe 33:

Zeigen Sie: Ist für die in Aufgabe 31 definierten Polynome

$$\omega(\lambda) = \text{ Anzahl der Vorzeichenwechsel von } (p_0(\lambda), p_1(\lambda), \dots, p_n(\lambda)),$$

so besitzt das Polynom $p_n(\lambda)$ im Interval $[a, b)$ genau $\omega(b) - \omega(a)$ Nullstellen.

(Ist $p_k(\lambda) = 0$ so definiert man $\operatorname{sign}(p_k(\lambda)) = \operatorname{sign}(p_{k-1}(\lambda))$.)

Aufgabe 34:

Berechnen Sie für $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ zu folgenden Funktionen jeweils die erste Ableitung.

(a) $x \mapsto \frac{1}{2}x^T A x + b^T x, \quad$ für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$;

(b) $x \mapsto \sum_{i=1}^m \log(\gamma_i - b_i^T x - \frac{1}{2}x^T A_i x), \quad$ für $A_i = A_i^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b_i \in \mathbb{R}^n$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$;

(c) $x \mapsto e^{x^T A x}, \quad$ für $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Abgabe der Übungsaufgaben am Dienstag, 03.12.2019 zu Beginn der Vorlesung.