MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

19.11.2019

27	28	29	30	Σ

NAME: ____________________

MAT-NR.: ____________________

GRUPPE: ____________________

Numerik II – 7. Übungsblatt

Aufgabe 27:

Gegeben sei eine beliebige nicht-singuläre (3×3)-Matrix, in der wir Nullelemente durch Multiplikation mit unitären Matrizen U_j (etwa Householder-Matrizen) von links oder rechts erzeugen möchten. Betrachten Sie die folgenden Matrixstrukturen:

$$\begin{bmatrix} \times & \times & 0 \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \times & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix}.$$

Entscheiden Sie für jede der drei Matrixstrukturen, welche der folgenden Situationen gilt und rechtfertigen Sie Ihre Aussage:

(a) Kann durch eine Folge von Multiplikationen von links mit Matrizen U_j erzeugt werden.

(b) Nicht (a), kann durch eine Folge von Multiplikationen von links und rechts mit Matrizen U_j erzeugt werden. Dabei müssen die Transformationen von links und rechts *nicht* dieselben sein.

(c) Kann nicht durch eine Folge von Multiplikationen von links und rechts mit Matrizen U_j erzeugt werden.

Aufgabe 28:

(a) Zeigen Sie, dass eine reelle Matrix, deren Gershgorin-Kreise alle disjunkt sind, nur reelle Eigenwerte hat.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit Einträgen größer gleich 0 und sei jede Zeilensumme von A gleich 1. Zeigen Sie:

  (i) Alle Eigenwerte von A sind betragsmäßig kleiner gleich 1.

  (ii) Mindestens ein Eigenwert von A ist gleich 1.

Aufgabe 29: (Bauer-Fike)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalisierbar, $X^{-1}AX = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und sei μ ein näherungsweiser Eigenwert mit näherungsweisem Eigenvektor $y \in \mathbb{C}^n$ mit $\|y\|_p = 1$. Zeigen Sie, dass in jeder p-Norm

$$\min_{1\le j\le n} |\mu - \lambda_j| \le \kappa_p(X)\|r\|_p$$

gilt, wobei $r = Ay - \mu y$ der Residuenvektor ist.

b.w.

Aufgabe 30: (QR Algorithmus mit Shifts)

Ergänzen Sie die Implementierung des QR Algorithmus ohne Shifts aus Aufgabe 26 um die Möglichkeit Shifts zu verwenden. Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor.

(a) Modifizieren Sie die Funktion `qralg` derart, dass Sie einen *einfachen* Rayleigh-Shift in jeder Iteration verwenden.

(b) Modifizieren Sie die Funktion `qralg` derart, dass Sie den Wilkinson-Shift in jeder Iteration verwenden.

(c) Testen Sie alle drei Varianten Ihres Programmes (kein Shift, Rayleigh- oder Wilkinson-Shift) mit der Matrix

```
A = np.diag(np.arange(15,0,-1)) + np.ones(15)     (Python) bzw.
    A = diag(15:-1:1) + ones(15,15)               (Matlab).
```

Vergleichen Sie die Konvergenzverläufe. Ist die Konvergenz linear, superlinear, quadratisch, kubisch,... ? Kann man sinnvollerweise von der "Anzahl Iterationen des QR-Algorithmus pro Eigenwert" sprechen?

Abgabe der Übungsaufgaben am Dienstag, 26.11.2019 zu Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Dienstag, 26.11.2019, 8:30 Uhr an *marina.fischer@uni-duesseldorf.de*.