22	23	24	25	26	Σ

NAME: ____________

MAT-NR.: ____________

GRUPPE: ____________

Numerik II – 6. Übungsblatt

Aufgabe 22:

Es sei $J_n(0)$ der Jordanblock der Dimension $n \in \mathbb{N}$ zum Eigenwert Null. Zeigen Sie, dass die Matrix $J_n(0) + \varepsilon \cdot e_n e_1^T$ die Eigenwerte $\varepsilon^{1/n}\, \omega_n^{-k}$ für $k = 1, \ldots, n$ besitzt, wobei hier wie üblich $\omega_n = \exp({-2\pi i}/{n})$ gesetzt wird.

Aufgabe 23:

Sei $A = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{m,\ n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

(a) Zeigen Sie, dass die *Frobenius-Norm*

$$\|A\|_F^2 := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

eine Matrixnorm ist. Zeigen Sie außerdem, dass die Frobenius-Norm nicht als eine durch eine Vektornorm induzierte Matrixnorm aufgefasst werden kann.

(b) Zeigen Sie, dass die Frobenius-Norm submultiplikativ ist, also dass für $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times l}$ gilt

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F \ .$$

(c) Ist $\{v^1, \ldots, v^n\}$ eine Orthonormalbasis des Raumes $\mathbb{R}^n$, so gilt $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \|Av^i\|_2^2$.

(d) Mit $\mathrm{tr}(M) := \sum_{i=1}^n m_{ii}$ wird die *Spur* der Matrix $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass die folgende Beziehung gilt:

$$\|A\|_F^2 = \mathrm{tr}(A^T A).$$

Aufgabe 24:

(a) Es sei $A = xy^H$, wobei x und y Vektoren in $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, sind. Zeigen Sie, dass 0 ein Eigenwert von A mit Vielfachheit mindestens $n-1$ ist und dass der verbleibende Eigenwert $\lambda = y^H x$ ist.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Householder-Matrix $P = I - 2uu^H$ mit $\|u\|_2 = 1$.

Aufgabe 25:

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des Wertebereichs $\mathcal{F}(A)$ einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

(a) $\mathcal{F}(A + \alpha I) = \mathcal{F}(A) + \alpha$ und $\mathcal{F}(\alpha A) = \alpha \mathcal{F}(A)$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$.

(b) Für den hermiteschen Anteil $H = \frac{1}{2}(A + A^H)$ von A gilt $\mathcal{F}(H) = \mathrm{Re}\mathcal{F}(A)$, wobei $\mathrm{Re}\mathcal{F}(A)$ die Projektion von $\mathcal{F}(A)$ auf die reelle Achse bezeichnet.

(c) $\mathcal{F}(A+B) \subseteq \mathcal{F}(A) + \mathcal{F}(B)$ für alle $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Geben Sie ein Beispiel, für das eine echte Inklusion vorliegt.

b.w.

Aufgabe 26: (QR Algorithmus ohne Shifts)

Implementieren Sie den QR Algorithmus ohne Shifts aus der Vorlesung. Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor.

(a) Schreiben Sie eine Funktion `HH = qralg(H,tol)`, die den ungeshifteten QR Algorithmus auf eine obere Hessenbergmatrix $H \in \mathbb{C}^{m \times m}$ anwendet. Brechen Sie ab, wenn der betragsmäßig größte Eintrag der unteren Nebendiagonalen kleiner als `tol` ist.

(b) Schreiben Sie eine Funktion `ew = findeeigenwerte(A,tol)`, die zunächst die obere Hessenbergform einer Matrix `A` berechnet und dann `qralg` verwendet um alle Eigenwerte von `A` zu berechnen. Speichern Sie die berechneten Eigenwerte in einem geeigneten Vektor `ew`.

(c) Modifizieren Sie `qralg` derart, dass Sie neben `HH` einen Vektor zurückliefern, der die Werte von $|H_{n,n-1}|$ in jeder Iteration enthält. Plotten Sie dann die aneinandergereihte Konvergenzgeschichte aller Eigenwerte in einem logarithmischen Plot gegen die Anzahl an QR-Zerlegungen.

(d) Testen Sie Ihre Implementierung mit Matrizen mit reellen Eigenwerten und der Hilbertmatrix (`hilbert` in Python bzw. `hilb` in Matlab).

Hinweis: Die Pythonfunktionen `hessenberg` und `qr` aus dem Modul `scipy.linalg` bzw. die Matlabfunktionen `hess` und `qr` dürfen Sie verwenden.

Abgabe der Übungsaufgaben am Dienstag, 19.11.2019 zu Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Dienstag, 19.11.2019, 8:30 Uhr an ***marina.fischer@uni-duesseldorf.de.***