18	19	20	21	Σ

NAME: ____________

MAT-NR.: ____________

GRUPPE: ____________

Numerik II – 5. Übungsblatt

Aufgabe 18:

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

und e_1, e_2, e_3 bezeichnen die üblichen Einheitsvektoren. Welche der folgenden Unterräume sind rechts A-invariant, welche nicht? Beweisen Sie jeweils Ihre Behauptung.

(a) $\mathcal{R}(e_1)$,
(b) $\mathcal{R}(e_2)$,
(c) $\mathcal{R}(e_3)$,
(d) $\mathcal{R}([e_1, e_2])$,
(e) $\mathcal{R}([e_2, e_3])$,
(f) $\mathcal{R}([e_1, e_2, e_3])$.

Aufgabe 19:

(a) Beweisen Sie folgende Variante des Satzes von Gershgorin: Für eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit Eigenwert λ gibt es einen (Spalten-)Index j so, dass

$$|\lambda - a_{jj}| \le \sum_{i=1,\ i\ne j}^{n} |a_{ij}|.$$

(b) Sei

$$A = \begin{bmatrix} -5 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -2+2\,i & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5}+\frac{4}{5}\,i & 2 & \frac{1}{2} \\ 2\,i & 0 & \frac{1}{2} & 1+i \end{bmatrix}.$$

(i) Skizzieren Sie mit Hilfe der Gershgorinkreise von A und A^T einen möglichst kleinen Bereich in der komplexen Ebene, der die Eigenwerte von A enthält, ohne die Eigenwerte zu berechnen.

(ii) Zwei der vier Eigenwerte von A sind: $\lambda_1 \approx -4.9229 - 0.2495\,i$ und $\lambda_2 \approx 0.8918 + 1.0620\,i$. Skizzieren Sie nun mit Hilfe der Gershgorinkreise von A und A^T einen möglichst kleinen Bereich, der die zwei verbleidenden Eigenwerte von A enthält, ohne die Eigenwerte explizit zu berechnen. Geben Sie eine Begründung für Ihre Zeichnung an.

Aufgabe 20:

Zeigen Sie, dass für normale Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $z \notin \sigma(A)$ gilt

$$(\mathrm{dist}(z, \sigma(A)))^{-1} = ||(zI - A)^{-1}||_2.$$

Hierbei ist für $\Omega \subset \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ die Distanz $\mathrm{dist}(z, \Omega) := \inf_{x\in\Omega}\{|x - z|\}$.

Aufgabe 21:

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit Schurzerlegung $Q^H AQ = R$ (R obere Dreiecksmatrix mit den Eigenwerten von A auf der Diagonalen) und paarweise verschiedenen Eigenwerten. Zeigen Sie, dass für $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $AB = BA$, d.h. B kommutiert mit A, $Q^H BQ$ obere Dreiecksgestalt besitzt.

Abgabe der Übungsaufgaben am Dienstag, 12.11.2019 zu Beginn der Vorlesung.