Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

29.10.2019

14	15	16	17	Σ

NAME: ____________

MAT-NR.: ____________

GRUPPE: ____________

Numerik II – 4. Übungsblatt

Aufgabe 14:

(a) Implementieren Sie einen schnellen Algorithmus, der die ersten $N+1$ Koeffizienten der Potenzreihe einer im Einheitskreis analytischen Funktion f, d.h. $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(f)\zeta^n$, berechnet. Die Koeffizienten $w_n(f)$ können mit Hilfe der Cauchy-Integralformel dargestellt werden, wobei über den Rand des Ursprungskreises mit Radius $\rho = \sqrt{\varepsilon}^{1/N}$ und Maschinengenauigkeit $\varepsilon > 0$ integriert wird, das heißt

$$w_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{1}{\zeta^{n+1}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta \quad \text{für } n = 0, \ldots, N.$$

Unter Verwendung der Trapezregel mit äquidistanter Schrittweite mit $L = 2^{\mathrm{ceil}(\log_2(\mathrm{N}))}$ Schritten bekommen wir, wie in der Vorlesung hergeleitet, die Approximation

$$w_n(f) \approx \frac{\rho^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} f\left(\rho e^{2\pi i l/L}\right) \omega_L^{nl}, \quad n = 0, \ldots, N.$$

(b) Schreiben Sie eine Funktion, die den Algorithmus aus (a) verwendet, um die Koeffizienten der Potenzreihe eines Produkts fg zu bestimmen. Wenden Sie hierfür den Algorithmus sowohl auf die Funktion f als auch auf g an und überlegen Sie sich, wie Sie die Koeffizienten $w_n(fg),\ n = 0, \ldots, N$ auf eine schnelle Art aus den Koeffizienten $w_n(f),\ n = 0, \ldots, N$ und $w_n(g),\ n = 0, \ldots, N$ erhalten.

(c) Testen Sie Ihre Funktion aus (b) mit $f(\zeta) = \sqrt{\frac{1+\zeta}{2(1-\zeta)}}$ und $g(\zeta) = \sin(\zeta)$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Resultat, wenn Sie direkt den Algorithmus aus (a) auf das Produkt fg anwenden.

Aufgabe 15:

Sofern nicht anders angegeben sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zeigen Sie oder finden Sie ein Gegenbeispiel für die folgenden Aussagen:

(a) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und λ ein Eigenwert von A, dann ist $-\lambda$ ein Eigenwert von A.

(b) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und λ ein Eigenwert von A, dann ist $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von A.

(c) Wenn λ ein Eigenwert von A ist und A nichtsingulär, dann ist λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1}.

(d) Wenn $\sigma(A) = \{0\}$, dann ist $A = 0$.

(e) Aus $AA^H = A^H A$ folgt $A = A^H$.

(f) Ist A hermitesch, d.h. $A = A^H$, dann ist $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

b.w.

Aufgabe 16:

(a) Beweisen Sie Lemma 2.6:
Sind zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ähnlich, so haben sie dasselbe charakteristische Polynom und dieselben Eigenwerte.

(b) Seien M und A zwei nichtsinguläre Matrizen. Die Matrix M kann zerlegt werden in $M = ST$, wobei S und T nicht notwendigerweise untere bzw. obere Dreiecksmatrizen sind. Zeigen Sie, dass die Matrizen $M^{-1}A$, AM^{-1} und $S^{-1}AT^{-1}$ dieselben Eigenwerte besitzen.

Aufgabe 17:

Beweisen Sie Lemma 2.8:
Gibt es zu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ein $X \in \mathbb{C}^{n\times k}$ mit $1 \leq \operatorname{rang}(X) = k \leq n$ und ein $B \in \mathbb{C}^{k\times k}$ so, dass $AX = XB$, dann gilt $\mathcal{R}(AX) \subseteq \mathcal{R}(X)$ und $\sigma(B) \subseteq \sigma(A)$.

Abgabe der Übungsaufgaben am Dienstag, 05.11.2019 zu Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Dienstag, 05.11.2019, 8:30 Uhr an *marina.fischer@uni-duesseldorf.de*.