Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut

Prof. Dr. Achim Schädle
Marina Fischer

22.10.2019

10	11	12	13	Σ

Name: ______________

Mat-Nr.: ______________

Gruppe: ______________

Numerik II – 3. Übungsblatt

Aufgabe 10:

Zeigen Sie für gerades $N \in \mathbb{N}$:

(a) Für $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ periodisch fortgesetzt gilt: $\hat{x}_{-k} = \overline{\hat{x}_k}$ für $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Falls $x \in \mathbb{C}^N$ eine periodisch fortgesetzte gerade Folge ist (d.h. $x_{-k} = x_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$), so ist auch die Fourier-Transformierte $\hat{x}$ gerade.

Hinweis: Eine gerade Folge hat für gerades N die Form $[x_0\ x_1\ \cdots x_{N/2-1} \mid x_{N/2}\ \cdots x_2\ x_1]$.

Aufgabe 11:

Zeigen Sie, dass für $k = 0, \ldots, N-1$ der Vektor $\left(\sin\left(\frac{(j+1)(k+1)\pi}{N+1}\right)\right)_{j=0}^{N-1}$ ein Eigenvektor der Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

zum Eigenwert $2\cos\left(\frac{(k+1)\pi}{N+1}\right) - 2$ ist.

Warum sind die Eigenvektoren orthogonal?

Aufgabe 12:

Implementieren Sie einen schnellen Löser für die Finite Differenzen-Approximation der Poisson-Gleichung

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \ \Omega = (0,1)\times(0,1) \\ u = 0 & \text{auf } \ \partial\Omega \qquad \text{(Dirichlet-Randbedingung)} \end{cases}$$

auf einem 512×512-Gitter.

Testen Sie Ihre Implementierung mit $f(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$. Die exakte Lösung ist in diesem Fall durch $u(x,y) = {}^1\!/\!{}_{(2\pi^2)}\sin(\pi x)\sin(\pi y)$ gegeben.

Aufgabe 13:

Beschreiben Sie einen schnellen Löser für die Finite Differenzen-Approximation der Helmholtzgleichung

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{in } \ \Omega = (0,1)\times(0,1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{auf } \ \partial\Omega \qquad \text{(Neumann-Randbedingung).} \end{cases}$$

Die Randbedingung wird mit Hilfe von Geisterpunkten $u_{m,-1}$, $u_{m,N+1}$, $u_{-1,n}$, $u_{M+1,n}$ für $n = 0, \ldots N$, $m = 0, \ldots, M$ approximiert, in dem

$$u_{m,-1} = u_{m,1} \quad (m = 0, \ldots, M) \quad \text{auf dem Randteil } \ y = 0$$

gesetzt wird, bzw. analog auf dem Rest des Randes, und die Finite Differenzen-Approximation auch für die Randpunkte verwendet wird.

Abgabe der Übungsaufgaben am Dienstag, 29.10.2019 zu Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Dienstag, 29.10.2019, 8:30 Uhr an *marina.fischer@uni-duesseldorf.de*.