Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

15.10.2019

6	7	8	9	Σ

NAME: ____________________

MAT-NR.: ____________________

GRUPPE: ____________________

Numerik II – 2. Übungsblatt

Aufgabe 6:

Gegeben seien $g_0, \dots, g_{N-1} \in \mathbb{R}$. Die diskrete Sinus-Transformation (DST) ist definiert durch

$$(\mathrm{DST}_N\, g)_k := 2 \sum_{j=0}^{N-1} g_j \sin\left(\frac{(j+1)(k+1)\pi}{N+1}\right) \qquad \text{für } k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Zeigen Sie, dass man die DST auch als Fouriertransformation eines geeigneten Vektors $f \in \mathbb{R}^{2N+2}$ schreiben kann.

Wie lässt sich dies ausnutzen, um mittels der FFT eine schnelle Sinus-Transformation zu entwickeln?

Aufgabe 7:

(a) Sei $x \in \mathbb{C}^N$. Stellen Sie für $a = (5, -1, 4, 0, 1, 3, 0, -1)$ und $b = (0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1)$ das zu $a * x = b$ gehörige lineare Gleichungssystem auf.

(b) Geben Sie ein Verfahren (Pseudocode) an, um für gegebenes $a \in \mathbb{C}^N$, mit $N = 2^L$, die exakten Eigenwerte und Eigenvektoren der linearen Abbildung $x \mapsto a * x$ zu bestimmen.

Aufgabe 8:

Es sei $f \in L^2(0, 2\pi)$ eine 2π-periodische Funktion mit Fourier-Koeffizienten α_k. Zeigen Sie, dass die Fourierkoeffizienten von $f(\cdot - s)$ für festes $s \in \mathbb{R}$ durch $\beta_k = e^{-iks}\alpha_k$ gegeben sind.

Aufgabe 9:

(a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $\hat{f}(k)$ der 2π-periodischen Funktion

$$f(x) = 11 \sin(25x) - 4\cos(3x) + 2e^{-3ix} - e^{ix}.$$

(b) Seien die diskreten Fourierkoeffizienten $\hat{f}_N(k)$ zur Funktion f aus (a) mittels der Approximation durch die Trapezregel gegeben. Ab welchem $N \in \mathbb{N}$ sind die diskreten Fourierkoeffizienten $\hat{f}_N(k)$ für $k = \{-25, \dots, 25\}$ identisch mit den exakten Fourierkoeffizienten $\hat{f}(k)$?

Abgabe der Übungsaufgaben am Dienstag, 22.10.2019 zu Beginn der Vorlesung.