Mathematisches Institut

Prof. Dr. Achim Schädle
Marina Fischer

14.01.2020

52	53	54	55	Σ

Name: ______________

Mat-nr.: ______________

Gruppe: ______________

Numerik II – 13. Übungsblatt

Aufgabe 52:

Beweisen Sie Lemma 4.10:
Sind $V_k = [v_1, \dots, v_k]$, $\widetilde{H}_k = (h_{ij})_{i,j=1}^{k+1,k}$ mit v_j und h_{ij} aus dem Arnoldi-Algorithmus und e_k k-ter Einheitsvektor, dann gilt

(a) $V_k^H V_k = I_k$.

(b) $AV_k = V_{k+1}\widetilde{H}_k = V_k H_k + h_{k+1,k} v_{k+1} e_k^T$.

(c) $V_k^H A V_k = H_k$.

(d) Falls $A = A^H$, so ist $H_k = H_k^H$, d.h H_k ist tridiagonal.

Aufgabe 53:

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit invertierbarer Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Leiten Sie das CGNE-Verfahren (Conjugate Gradient for Normal Equations) zur Approximation von x her, indem Sie $x = A^T u$ substituieren und auf das resultierende Gleichungssystem für u das CG-Verfahren anwenden. Elimimieren Sie nun im CGNE-Verfahren die Variable u, sodass Sie eine Näherungsfolge $(x_k)_k$ erhalten.

Aufgabe 54:

Angenommen, das Arnoldi-Verfahren bricht in Schritt m ab, d.h. $h_{m+1,m} = 0$. Zeigen Sie, dass dann

(a) $\mathcal{K}_m(A, b)$ ein A-invarianter Unterraum ist;

(b) $\mathcal{K}_m(A, b) = \mathcal{K}_{m+1}(A, b) = \mathcal{K}_{m+2}(A, b) = \dots$, also $\dim \mathcal{K}_N(A, b) = m$ gilt.

Aufgabe 55:

Verifizieren Sie die Formeln für die Givens-Rotationsmatrizen, d.h. zeigen Sie für gegebenes $\delta, \gamma \in \mathbb{C}$:

$$\begin{bmatrix} c_m & s_m \\ -\overline{s}_m & c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(\delta)\sqrt{|\delta|^2 + |\gamma|^2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

mit

$$c_m = \frac{|\delta|}{\sqrt{|\delta|^2 + |\gamma|^2}}, \qquad s_m = \operatorname{sgn}(\delta)\frac{\overline{\gamma}}{\sqrt{|\delta|^2 + |\gamma|^2}} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{sgn}(\delta) = \begin{cases} \frac{\delta}{|\delta|}, & \text{falls } \delta \neq 0 \\ 1, & \text{falls } \delta = 0 \end{cases}.$$

Abgabe der Übungsaufgaben am Dienstag, 21.01.2020 zu Beginn der Vorlesung.