Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

07.01.2020

48	49	50	51	Σ

NAME: ____________

MAT-NR.: ____________

GRUPPE: ____________

Numerik II – 12. Übungsblatt

Aufgabe 48:

Gegeben seien $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$, mit einer symmetrischen positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und Vektoren $x, b \in \mathbb{R}^n$, sowie eine invertierbare Matrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und ein Vektor $d \in \mathbb{R}^n$.

(a) Schreiben Sie das Quasi-Newton-Verfahren aus der Vorlesung für die Minimierung von f auf, wobei Sie die Schrittweiten α_k optimal wählen und die BFGS-Formel als Update für die Matrizen H_k verwenden.

(b) Schreiben Sie das Quasi-Newton-Verfahren aus der Vorlesung für die Minimierung von $\widetilde{f}(\widetilde{x}) := f(C\widetilde{x} + d)$ auf, wobei Sie die Schrittweiten $\widetilde{\alpha}_k$ optimal wählen und die BFGS-Formel als Update für die Matrizen $\widetilde{H}_k$ verwenden.

Aufgabe 49:

Seien f, $\widetilde{f}$, A, x, b, C und d wie in Aufgabe 48. Die Anwendung des BFGS-Algorithmus aus der Vorlesung mit Startmatrix $H_0 = CC^T$ und Startwert x_0 auf die Funktion f liefere die Iterierten x_k, die Anwendung auf $\widetilde{f}$ mit Startmatrix $\widetilde{H}_0 = I$ und Startwert $\widetilde{x}_0$ die Iterierten $\widetilde{x}_k$. Zeigen Sie, dass für die Iterierten und BFGS-Matrizen gilt

$$x_k = C\widetilde{x}_k + d \qquad \text{und} \qquad H_k = C\widetilde{H}_k C^T, \qquad k \in \mathbb{N},$$

falls für die Startwerte $x_0 = C\widetilde{x}_0 + d$ gilt und die Schrittweiten optimal gewählt wird. (D.h. das BFGS–Verfahren ist *affin invariant*.)

Aufgabe 50:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine nicht-singuläre Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und x_m eine Folge von approximativen Lösungen von $Ax = b$. Zeigen Sie, dass für $\widehat{x} := A^{-1}b$, $e_m := \widehat{x} - x_m$ und $r_m := A(\widehat{x} - x_m) = Ae_m$ gilt

$$\frac{1}{\kappa(A)}\frac{\|r_m\|}{\|r_0\|} \le \frac{\|e_m\|}{\|e_0\|} \le \kappa(A)\frac{\|r_m\|}{\|r_0\|},$$

wobei $\kappa(A)$ die Konditionszahl von A bezüglich der $\|\cdot\|$-Norm bezeichnet.

Aufgabe 51:

Beweisen Sie Satz 4.8:
Ist $AV_m = V_m H_m$ und ist $W_m^H V_m$ invertierbar, so ist $x_m = V_m y_m$, wobei y_m durch (G) oder (M) charakterisiert ist, die exakte Lösung von $Ax = b$.

Abgabe der Übungsaufgaben am Dienstag, 14.01.2020 zu Beginn der Vorlesung.