Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
MARINA FISCHER

17.12.2019

44	45	46	47	Σ

NAME: ______________

MAT-NR.: ______________

GRUPPE: ______________

Numerik II – 11. Übungsblatt

Aufgabe 44:

Zeigen Sie die folgenden Invarianzeigenschaften von Krylov-Räumen:

(a) Skalierung: $\mathcal{K}_m(\alpha A, \beta b) = \mathcal{K}_m(A, b)$ für alle $\alpha, \beta \neq 0$.

(b) Translation: $\mathcal{K}_m(A - \alpha I, b) = \mathcal{K}_m(A, b)$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$.

(c) Basiswechsel: $\mathcal{K}_m(TAT^{-1}, Tb) = T\mathcal{K}_m(A, b)$ für alle nicht singulären Matrizen T.

Aufgabe 45:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei $A + A^T$ nicht singulär ist. Zur Bestimmung des Minimums der quadratischen Funktion

$$f(x) = x^T Ax + b^T x + c$$

mit $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ kann man das Newtonverfahren verwenden, wobei die Schrittweite optimal gewählt wird.

(a) Geben Sie hierfür die Iterationsvorschrift an.

(b) Geben Sie den Gradienten und die Hessematrix von $f(x)$ an.

(c) Bestimmen Sie die optimale Schrittweite.

(d) Diskutieren Sie das Konvergenzverhalten.

Aufgabe 46:

(a) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie, dass jede lokale Minimalstelle auch eine globale Minimalstelle ist.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv semidefinit. Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^T Ax$ eine konvexe Funktion ist.

Aufgabe 47:

Implementieren Sie das stochastische Gradientenverfahren (Algorithmus 3.23) für $f(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} f_i(x)$ mit

- den Schrittweiten $\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ und
- der Mächtigkeit 10 der Sample S_k.

Testen Sie Ihre Implementierung an den folgenden Fällen:

(a) Für $x \in \mathbb{R}^{100}$ sei

$$f_i(x) = (2x_i + x_{i-1} + x_{i+1})x_i, \;\; i = 0, \dots, 99,$$

wobei $x_{-1} := x_{99}$ und $x_{100} := x_0$. Die exakte Lösung x^* ist hier der Nullvektor.

(b) Für $x \in \mathbb{R}^2$ sei

$$f_i(x) = \left(x_0 + \frac{i-50}{10}x_1 - \frac{i-50}{10} + \operatorname{sign}\left(\frac{i-50}{10}\right)\right)^2, \;\; i = 0, \dots, 100.$$

Bestimmen Sie die exakte Lösung mit Hilfe von `numpy.linalg.lstsq`.

Starten Sie die Iteration jeweils mit dem ersten Einheitsvektor der passenden Größe und brechen Sie die Iteration ab, wenn 10 000 Schritte erreicht wurden. Plotten Sie den Verlauf von $|f(x^k) - f(x^*)|$ gegen die Anzahl der Schritte k.

Fröhliche Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Abgabe der Übungsaufgaben am Dienstag, 07.01.2020 zu Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Dienstag, 07.01.2020, 8:30 Uhr an ***marina.fischer@uni-duesseldorf.de.***