Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut

Prof. Dr. Achim Schädle
Marina Fischer

10.12.2019

40	41	42	43	Σ

Name: ____________

Mat-Nr.: ____________

Gruppe: ____________

Numerik II – 10. Übungsblatt

Aufgabe 40:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit mit Eigenwerten $0 < \lambda_n \leq \ldots \leq \lambda_1$. Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ werde iterativ mit der Methode des steilsten Abstiegs unter Verwendung der optimalen Schrittweiten α_k und mit beliebigem Startwert x_0 gelöst. Mit $\widehat{x}$ bezeichen wir hierbei die exakte Lösung des Gleichungssystems und mit x_k die Iterierten des Verfahrens.

(a) Zeigen Sie, dass für die Iterierten $\widetilde{x}_k$ des Verfahrens zur Lösung von $Ax = 0$ mit Startwert $\widetilde{x}_0 = x_0 - \widehat{x}$ gilt

$$\widetilde{x}_k = x_k - \widehat{x}.$$

(b) Zeigen Sie, dass in der Norm $\|v\|_A = \sqrt{v^T A v}$ für den Fehler der Iterierten gilt

$$\|x_{k+1} - \widehat{x}\|_A \leq \left(1 - \frac{2}{\kappa_2(A) + 1}\right) \|x_k - \widehat{x}\|_A,$$

wobei $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$.

Aufgabe 41:

Beweisen Sie den folgenden Satz: Seien $b \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit, V ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ und $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$. Sei $x \in V$, dann gilt

$$f(x) = \min_{y\in V} f(y) \quad \Longleftrightarrow \quad y^T Ax = y^T b \quad \forall y \in V.$$

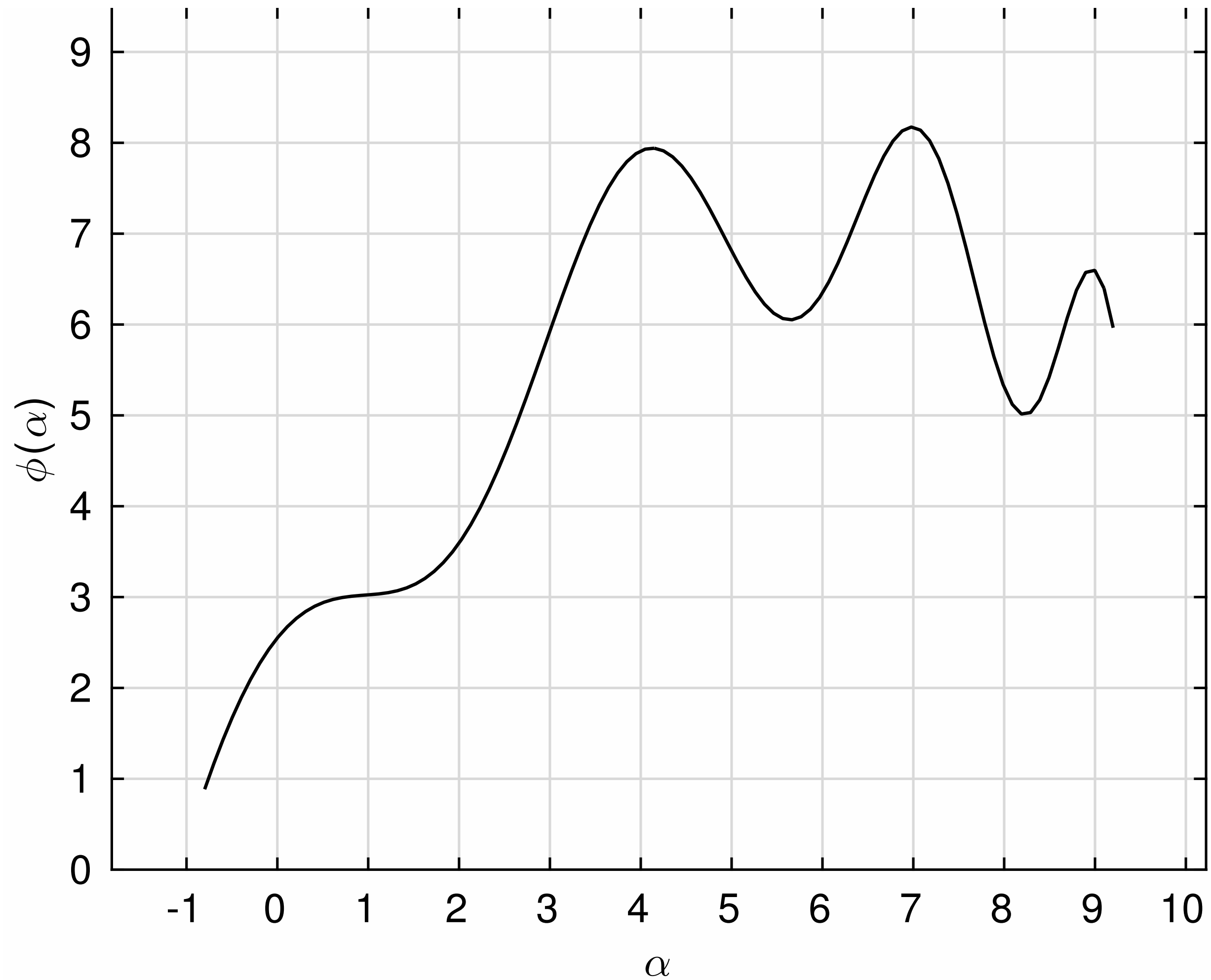
Aufgabe 42:

Zur Bestimmung eines lokalen **Maximums** einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kann man das Verfahren des steilsten **Anstiegs** verwenden.

(a) Formulieren Sie hierfür ausgehend von der Iterierten x_k die Verfahrensvorschrift zur Berechnung von x_{k+1}. Verwenden Sie hierbei die optimale Schrittweite.

(b) Wie sollten bei einem Anstiegsverfahren die beiden Wolfebedingungen aussehen, die die zulässigen Schrittweiten bestimmen?
Skizzieren Sie für die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha \mapsto \varphi(\alpha) := f(x_k + \alpha s_k)$ diese beiden Wolfebedingungen für $c_1 = \frac{1}{2}$ und $c_2 = \frac{2}{3}$ in die Grafik.

b.w.



Aufgabe 43:

Implementieren Sie das CG-Verfahren zur Minimierung nichtquadratischer Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in der Fletcher-Reeves Variante und mit einer Armijo-Liniensuche.

Verwenden Sie `con_grad(f, g, x0, tol)` als Signatur. Hierbei bezeichnet `f` den Handle auf die Funktion, `g` den Handle auf deren Gradienten, `x0` den Startpunkt und `tol` die Toleranz für das Abbruchkriterium. Zurückgegeben werden sollen die Approximation `x` der Minimalstelle und alle Iterierten in einer Matrix `xall` (also `xall=[x0,x1,x2,...,xm]`). Lösen Sie hiermit die folgenden Aufgaben:

(a) Minimiere die Funktion $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$ (Himmelblau-Funktion) mit `tol`$=10^{-1}$ und `x0` $= (-0.27, -0.91)^T$, `x0` $= (-0.271, -0.91)^T$, `x0` $= (-0.25, -1.1)^T$ und `x0` $= (-0.25, -1)^T$.

(b) Minimiere die Funktion $f(x_1, x_2) = (1 - x_1)^2 + 105(x_2 - x_1^2)^2$ (Rosenbrock-Funktion) mit `x0`$=(0.5, -1)^T$ und `tol`$=10^{-2}$.

Plotten Sie in beiden Fällen die Funktion und jeweils die Pfade der ersten 40 Zwischenschritte zu den verschiedenen Startwerten.

Abgabe der Übungsaufgaben am Dienstag, 17.12.2019 zu Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Dienstag, 17.12.2019, 8:30 Uhr an *marina.fischer@uni-duesseldorf.de*.