

1	2	3	4	5	Σ

NAME: _____
MAT-NR.: _____
GRUPPE: _____
PROGRAMMIERAUFGABE: _____

Numerik II – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei $V := \text{span}\{e^{ikx} \mid -\frac{N}{2} < k \leq \frac{N}{2}\}$ mit geradem N . Zeigen Sie:

(a)

$$((f, g)) := \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \overline{g(x_j)}, \quad x_j = \frac{2\pi j}{N}$$

ist eine hermitesche Bilinearform (Sesquilinearform) in V mit

$$((e^{ijx}, e^{ikx})) = \begin{cases} N, & \text{für } j, k \in \mathbb{Z} \text{ und } j - k = lN \text{ für ein } l \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) $((\cdot, \cdot))$ ist ein Skalarprodukt in V .

(c) $\frac{e^{ikx}}{\sqrt{N}}, -\frac{N}{2} < k \leq \frac{N}{2}$, bilden eine Orthonormalbasis bezüglich des $((\cdot, \cdot))$ -Skalarprodukts.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass die diskrete Faltung kommutativ und assoziativ ist.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass für eine absolut summierbare Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und ihre Fouriertransformierte $\hat{c}(t)$ gilt

(a) $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \hat{c}(t) dt,$

(b) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\hat{c}(t)|^2 dt$

(vgl. Lemma 1.11).

Aufgabe 4:

Sei f 2π -periodisch mit absolut summierbaren Fourierkoeffizienten $\hat{f}(n)$. Deren Approximation durch die Mittelpunktsregel ergibt

$$\hat{f}_N(n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) e^{-int_j} \quad \text{mit} \quad t_j = \frac{2j+1}{2} \cdot \frac{2\pi}{N}.$$

Zeigen Sie: $\hat{f}_N(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \hat{f}(n + lN).$

Aufgabe 5:

Implementieren Sie für $N = 2^L$ die schnelle Fouriertransformation. Dabei sollen die benötigten ω_N^k für $k = 0, \dots, N - 1$ nur einmal zu Anfang berechnet und dann der Funktion übergeben werden. Überlegen Sie sich einen geeigneten Test um Ihre Funktion zu überprüfen.

Bemerkungen:

Pro Aufgabe gibt es sechs Punkte.

Bitte schreiben Sie auf jeden abgegebenen Übungszettel *lesbar* Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppennummer. Die Abgabe der Zettel ist immer Dienstags zu Beginn der Vorlesung. Sie werden korrigiert in der jeweiligen Übungsgruppe zurückgegeben.

Zulassungsvoraussetzung für die Prüfung:

- Sie müssen mindestens 40% der Übungspunkte erreichen.
- Weiterhin müssen Sie mindestens drei (Teil-)Aufgaben in der Übungsgruppe vorrechnen.

**Abgabe der Übungsaufgaben am Dienstag, 15.10.2019 zu Beginn der Vorlesung.
Abgabe der Programmierübungen per E-Mail bis Dienstag, 15.10.2019, 8:30 Uhr an
marina.fischer@uni-duesseldorf.de.**