Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ANDREAS TROLL

28.11.2019

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 8. Übungsblatt

Aufgabe 29:

Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto x\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$$

(a) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung, $\frac{d}{dx}f(x)$ und $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$, von f.

(b) Berechnen Sie (mit `for`-Schleifen) alle paarweisen Schnittpunkte von f, $\frac{d}{dx}f(x)$ und $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$.

(c) Zeichnen Sie f, $\frac{d}{dx}f(x)$ und $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ in unterschiedlichen Farben in eine Graphik und fügen Sie eine Legende mit geeigneten Labels hinzu.

(d) Fügen Sie die Schnittpunkte aus (b) als schwarze Kreise hinzu und wählen Sie den Definitionsbereich so, dass ein aussagekräftiges Bild entsteht.

Tipp: Mit einer Liste in (b) können Sie sich in (d) viel Schreibarbeit sparen.

Aufgabe 30:

(a) Lösen Sie die Gleichung $2^x - 2\sqrt{x} = 0$ exakt. Überprüfen Sie an einem Plot, ob alle Lösungen gefunden wurden. Berechnen Sie ggf. weitere Lösungen numerisch.

(b) Gehen Sie analog zu (a) mit der Gleichung $3^x - 3x^{2/3} = 0$ vor.

(c) Raten Sie alle Lösungen der Gleichung $a^x - ax^{(a-1)/a} = 0$ für $a \geq 1$. Überprüfen Sie ihre Vermutung für $a \in \{2, \ldots, 10\}$, indem Sie die Lösung zunächst numerisch berechnen und anschließend als exakte rationale Zahl wieder in die Gleichung einsetzen. Verwenden Sie eine `for`-Schleife und für die Ausgabe die Funktion `display`.

Aufgabe 31:

Gegeben sei die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 36x^2 + 120x}{9x^2 + 96x + 120}.$$

Finden Sie die a_k, $k = 0, \ldots, 5$, des Kettenbruches

$$g(x) = a_0 + \cfrac{x}{a_1 + \cfrac{x}{a_2 + \cfrac{x}{a_3 + \cfrac{x}{a_4 + \cfrac{x}{a_5}}}}},$$

so dass $f(x) = g(x)$ für alle x gilt.

Gehen Sie beispielsweise wie folgt vor:

(a) Erstellen Sie die `sympy`-Ausdrücke `f` und `g`.

(b) Mit Hilfe von `fraction` und `together` können Sie die Zähler- und Nennerpolynome $p(x)$ und $q(x)$ extrahieren, so dass $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ gilt (analog mit g).
Tipp: Verwenden Sie `Poly`.

(c) Erstellen Sie, am besten mit Hilfe von Schleifen, eine Liste mit Gleichungen für die a_k, indem Sie die Koeffizienten der Zähler bzw. Nennerpolynome von f und g vergleichen.

(d) Lösen das Gleichungssystem nach den a_k exakt auf und überprüfen Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 32:

Zeichnen Sie für $z \in \mathbb{C}$ die Lösungsmenge von

$$\left| \frac{R(z)}{e^z} \right| = 1,$$

mit der rationalen Funktion

$$R(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z}{1 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{6}z^2}$$

im Bereich $[-4, 4] \times i[-5, 5]$.

Hinweis: Bei dieser Lösungsmenge handelt es sich um einen so genannten Ordnungsstern.

Besprechung in den Übungen vom 2.-6. Dezember 2019.