hhu Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Andreas Troll

14.11.2019

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 6. Übungsblatt

Aufgabe 21:

Gegeben sei folgende Python-Funktion (vergleiche Vorlesung):

```
def f(c):
    if c > 1:
        c = 1
    elif c < -1:
        c = -1
    else:
        c = c**3
    return c
```

Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion mit *matplotlib* im Intervall $[-2, 3]$.

Aufgabe 22:

(a) Schreiben Sie eine Python-Funktion `viele_tangenten`, die folgenden Eingabeparameter erhält:

- f: Eine von x abhängige `sympy` Funktion
- (a, b): ein 2-Tuple mit Intervallgrenzen
- n: eine natürliche Zahl

`viele_tangenten` soll, ähnlich zu Aufgabe 18, f im Intervall $[a, b]$ in der Farbe *blau* und zusätzlich n Tangenten in *rot* zeichnen. Dazu wird das Intervall $[a, b]$ in n Teilintervalle $I_k = [x_k, x_{k+1}]$, wobei $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$ mit $k = 0, \ldots, n-1$, unterteilt. Auf jedem Teilintervall soll die Tangente an f in der Mitte des Teilintervalls gezeichnet werden (dadurch überschneiden sich die Tangenten NICHT).

(b) Testen Sie Ihre Funktion an $f(x) = \frac{x \sin(x)}{x^2+1}$, $[a, b] = [-10, 9]$ und $n = 5$.

Aufgabe 23: Die Tschebyscheff-Polynome T_n, $n \in \mathbb{N}_0$ auf dem Intervall $[\,-1, 1\,]$ aus Aufgabe 14 lassen sich auch rekursiv berechnen als

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad \text{für } n \geq 1.$$

(a) Berechnen Sie T_n für $0 \leq n \leq 5$ und überprüfen Sie ihre Ergebnisse mit der `sympy`-Funktion `chebychevt(n,x)`.

(b) Zeigen Sie, dass für n, $m \in \{0, 1, \ldots, 5\}$ jeweils gilt, dass

$$\int_{-1}^{1} T_n(x) \cdot T_m(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & \text{falls } n = m = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{falls } n = m \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) Zeichnen Sie die Tschebyscheff-Polynome für ungerade n im Intervall $[-1, 1]$ in ein einziges Bild und fügen Sie eine aussagekräftige Legende hinzu.

Hinweis: Verwenden Sie in allen Teilaufgaben sinnvoll for-Schleifen und zum Plotten die Bibliothek `matplotlib`. Benutzen Sie außerdem für die symbolische Ausgabe die Funktion `display`.

Aufgabe 24:

Gegeben sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix}$$

Zeichnen Sie mit Hilfe des `matplotlib` Befehls `quiver` f auf dem Quadrat $[-1, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$.

Definieren Sie sich hierfür die 9^2 kartesischen Gitterpunkte (x_k, y_l) mit $x_k = -1 + \frac{k}{4}$ mit $k = 0, \ldots, 8$ und y_l analog.

In (x_k, y_l) soll also ein Pfeil von (x_k, y_l) nach $(x_k + f_1(x_k, y_l), y_l + f_2(x_k, y_l))$ gezeichnet werden.

Zeichnen Sie zur besseren Übersicht Gitterlinien in den Plot und beschränken Sie den x- und y-Achsenbereich geeignet.

Hinweis: Schauen Sie sich dafür die Dokumentation von `quiver` an.

Besprechung in den Übungen vom 18.-22. November 2019.