Heinrich Heine Universität Düsseldorf
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Andreas Troll

31.10.2019

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 4. Übungsblatt

Aufgabe 13:

Zeichnen Sie, passend zu Halloween, eine Fledermaus, indem Sie die folgenden beiden Funktionen $f_o(x)$ (für die obere Hälfte) und $f_u(x)$ (für die untere Hälfte) im Intervall $x \in [-7, 7]$ plotten.

$$f_o(x) = w(x)+(-h(x)+r(x))\cdot\theta(x-1)+(h(x)-l(x))\cdot\theta(x+1)+(l(x)-w(x))\cdot\theta(x+3)+(-r(x)+w(x))\cdot\theta(x-3)$$

$$\begin{aligned} f_u(x) = & -3\sqrt{1-\frac{x^2}{49}} \\ & + 2\left((1-\theta(x-4))\cdot\theta(x+4)\right)\left(-\frac{x^2\left(-\frac{1}{16}+\frac{3\sqrt{33}}{112}\right)}{2}+\frac{3\sqrt{1-\frac{x^2}{49}}}{2}+\frac{\sqrt{1-(||x|-2|-1)^2}}{2}+\frac{|x|}{4}-\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} w(x) &= 3\sqrt{1-\frac{x^2}{49}} \\ l(x) &= \frac{x}{2}-\frac{3\sqrt{10}\sqrt{4-(x+1)^2}}{7}+\frac{3}{2}+\frac{6\sqrt{10}}{7} \\ h(x) &= -\frac{11\left|x-\frac{3}{4}\right|}{2}+\frac{3\left|x-\frac{1}{2}\right|}{2}+\frac{3\left|x+\frac{1}{2}\right|}{2}-\frac{11\left|x+\frac{3}{4}\right|}{2}+9 \\ r(x) &= -\frac{x}{2}-\frac{3\sqrt{10}\sqrt{4-(x-1)^2}}{7}+\frac{3}{2}+\frac{6\sqrt{10}}{7} \\ \theta(x) &= \text{Heaviside}(x) \end{aligned}$$

Quelle: https://math.stackexchange.com/questions/54506/is-this-batman-equation-for-real/56150#56150

Aufgabe 14:

(a) Schreiben Sie eine Python-Funktion `mycheb(n,x)`, die das n-te Tschebyscheff-Polynom erster Art

$$T_n(x) := \cos(n \arccos(x)), \quad x \in [-1, 1]$$

berechnet. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der sympy-Funktion `chebyshevt(n,x)` für verschiedene Werte von n.

(b) Schreiben Sie eine Python-Funktion `mylaguerre(n,x)`, die das n-te Laguerre-Polynom

$$L_n(x) := \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

berechnet. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der sympy-Funktion `laguerre(n,x)` für verschiedene Werte von n.

Hinweis: In Teil (a) müssen Sie in Ihrer Funktion noch eine Umformung veranlassen, welche die Darstellung von T_n auch tatsächlich in ein Polynom überführt.

Aufgabe 15:

(a) Gegeben seien die drei Funktionen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f := x \mapsto \frac{2 - \frac{x^3}{2}}{x^2 + 1}\ , \quad g := x \mapsto |\sin(x)|, \quad h := x \mapsto -\sqrt[4]{x}.$$

Setzen Sie $u := f \circ g \circ h$, $v := g \circ h \circ f$ und $w := h \circ f \circ g$ ($\circ$ bezeichnet die Hintereinanderausführung). Zeichnen Sie die Graphen von u, v und w in einem Bild. Wählen Sie den Definitions- und Wertebereich so, dass das Bild möglichst aussagekräftig wird. Verwenden Sie außerdem verschiedene Farben und fügen Sie eine Legende mit geeigneten Labels hinzu.

(b) Gegeben sei das Polynom

$$g(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3.$$

Zeichen Sie seine Nullstellenmenge in der xy-Ebene.

Hinweis: Verwenden Sie ähnlich wie `.line_color` die Methode `.label`, um die Labels für die Legende anzugeben. Mit `.ylim = (ymin,ymax)` können Sie außerdem den Wertebereich einschränken.

Aufgabe 16:

(a) Zeichnen Sie die Spirale aus Abb. 1 und bestimmen Sie die Länge der Kurve numerisch. Können Sie die Länge der Kurve auch exakt angeben?

(b) Zeichnen Sie nun die Spirale aus Abb. 2 und bestimmen Sie auch hier die Länge der Kurve numerisch. Können Sie die exakte Länge hier ebenfalls angeben?

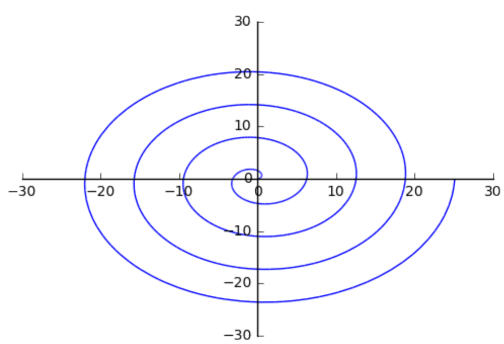

Abbildung 1: Spirale in der Ebene. Parametrisierung: $x \mapsto (x\cos(x), x\sin(x))$

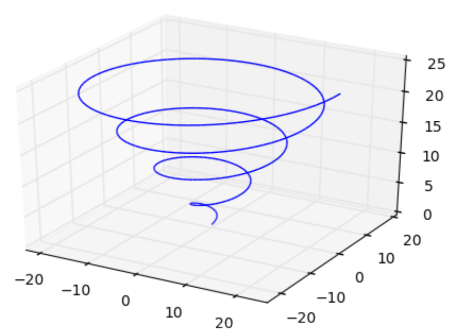

Abbildung 2: Spirale im Raum. Parametrisierung: $x \mapsto (x\cos(x), x\sin(x), x)$

Besprechung in den Übungen vom 4.-8. November 2019.