

**Computergestützte Mathematik zur Analysis – 13. Übungsblatt**

**Aufgabe 49:**

Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned}
 y_1'' &= -\frac{12}{11}y_1 - \frac{1}{11}y_2, & y_1(0) &= 0, & y_1'(0) &= 0, \\
 y_2'' &= -\frac{12}{11}y_2 - \frac{1}{11}y_1, & y_2(0) &= 1, & y_2'(0) &= 0.
 \end{aligned}$$

Erstellen Sie eine aussagekräftige Zeichnung, indem Sie die beiden Komponentenfunktionen der Lösung in ein Bild zeichnen. Überprüfen Sie, ob Ihre Lösung das Differentialgleichungssystem wirklich löst.

**Aufgabe 50:**

Wir betrachten die Anfangswertaufgabe

$$y' = \sqrt{xy}, \quad \text{mit } y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

- (a) Lösen Sie (1) mit `dsolve` für die Anfangsbedingungen  $y(1) = w_1, w_2, w_3$  mit  $w_1 = 0$ ,  $w_2 = \frac{1}{50}$  und  $w_3 = \frac{1}{9}$ . Zeichnen Sie die Lösungen im Intervall  $[0, 2]$ .
- (b) Schneiden sich die Lösungen? Dann überlegen Sie sich bitte, ob die Kurvenverläufe in Übereinstimmung mit dem Satz von Picard-Lindelöf stehen.
- (c) Fügen Sie nun zur Zeichnung das Richtungsfeld der Differentialgleichung hinzu (Tipp: `quiver`).
- (d) Erklären Sie in wenigen Zeilen, welche Kurvenabschnitte nicht zur Lösung gehören und zeichnen Sie die Kurven gut sichtbar jeweils über dem maximalen Teilintervall von  $x \in [0, 3]$ , über dem sie die Differentialgleichung auch tatsächlich lösen.

**Aufgabe 51:**

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und sei  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine hinreichend glatte Abbildung.

Zeigen Sie mit `sympy`, dass durch

$$y(x) = e^{xA}y_0 + \int_0^x e^{(x-s)A} f(s, y(s)) ds$$

eine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay + f(x, y), \quad y(0) = y_0$$

definiert wird.

*Hinweis:* Es reicht,  $A$  als `symbol` zu definieren.

**Aufgabe 52:**

Es sei  $I_j$  die in der Vorlesung vorgestellte modifizierte Besselfunktion erster Art. Zeichnen Sie mit `matplotlib` jeweils für  $j \in \{0, \dots, 3\}$  die Funktionen  $I_j, I_j'$  und  $I_j''$  über dem Intervall  $[0, 2]$  in ein Bild (also insgesamt vier Plots mit je drei Funktionen).

*Vergessen Sie nicht, sich zur Klausur anzumelden!*

**Besprechung in den Übungen vom 20.-24. Januar 2020.**