Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ANDREAS TROLL

9.1.2020

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 12. Übungsblatt

Aufgabe 45:

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' - \frac{y}{x} - x^2 - x^3 + 2x^4 = 0, \quad y(1) = y_0$$

für $y(1) = 1, 0, -1$. Zeichnen Sie die drei Lösungen in ein Bild. Wählen Sie den Bildausschnitt so, dass Sie ein aussagekräftiges Bild erhalten.

Erinnern Sie sich an den Satz von Picard-Lindelöf. Warum ist der offensichtliche Widerspruch der Zeichnung zu diesem Satz nur scheinbar?

Aufgabe 46:

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = \sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

(a) Zeichen Sie den Graphen von f über der Kreisscheibe vom Radius 3 mit Mittelpunkt $(0,0)$.

Hinweis: Um über die Kreisschreibe zu plotten, setzen sie alle Werte, die außerhalb der Kreisscheibe liegen auf den Wert `np.nan`. Diese Werte werden dann beim Plotten ignoriert.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f. Welche geometrische Gestalt haben die Lösungen? Wurden alle Lösungen gefunden? Begründen Sie kurz ihre Antwort.

(c) Zeichnen Sie die gefundenen Lösungen aus Teil b) in ein Bild.

Aufgabe 47:

Sei

$$f(x,y) = x(y^2-1)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}.$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion f.

(b) Färben Sie für jede dieser Stellen den Graphen so ein, dass man das Verhalten (Minimum, Maximum oder Sattelpunkt) erkennen kann.

Hinweis: Verwenden Sie `Normalize`. Es sind mehrere Bilder notwendig.

(c) Markieren Sie alle kritischen Stellen im Graphen mit einem schwarzen Kreuz.

(d) Überprüfen Sie die Vermutungen aus Teil b) durch Nachrechnen.

Aufgabe 48:

Die *Krümmung* $\kappa(x, f)$ einer Kurve, die als Graph einer Funktion f gegeben ist, im Punkt $(x, f(x))$ ist

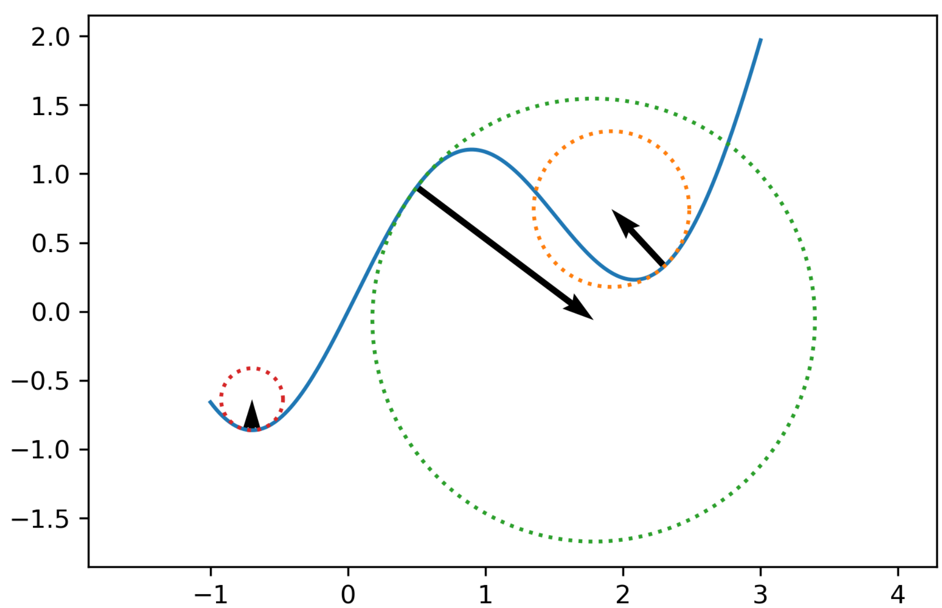
$$\kappa(x, f) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(a) Schreiben Sie eine Funktion `zeichne_kruemmung(f, xs, intervall)`, die eine Funktion f, ein `tuple xs` und ein `tuple intervall` übergeben bekommt und folgendes für jedes x aus `xs` tut:

- Der auf 1 normierte Normalenvektor n zur Tangente von f (der Vektor der senkrecht zum Steigungsvektor steht und Länge 1 hat) im Punkt $(x, f(x))$ soll berechnet werden.
- Zeichnen Sie einen Kreis mit Radius $\frac{1}{|\kappa(x,f)|}$ und Mittelpunkt $(x, f(x)) + \frac{n}{|\kappa(x,f)|}$ (siehe Hinweis).
- Zeichnen Sie einen Pfeil (zB mit `quiver`) (oder einfach eine Linie) von $(x, f(x))$ zum Mittelpunkt des Kreises.

Zeichnen Sie zusätzlich in den selben Plot noch f im Intervall `intervall`.
Hinweis: Bedenken Sie, dass es zwei Normalenvektoren gibt. Verwenden Sie den Vektor, so dass sich der Kreis am Punkt $(x, f(x))$ an die Funktion „anschmiegt“.

(b) Testen Sie Ihre Funktion an:
$f(x) = \sin(2x) + \frac{x^2}{4}$, `xs`=[-0.7, 0.5, 2.3] und `intervall`=[-1,3].
Ihre Ausgabe sollte ungefähr wie folgt aussehen:



Besprechung in den Übungen vom 13.-17. Januar 2020.