Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ANDREAS TROLL

19.12.2019

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 11. Übungsblatt

Aufgabe 41:

(a) Schreiben Sie eine PYTHON-Funktion `mygradient(f,var)`, die den Gradienten einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ berechnet, wobei `var` ein Tupel ist, das die Variablen enthält, nach denen abgeleitet wird. Das Resultat soll als Vektor (also vom Typ `Matrix`) zurückgegeben werden.

(b) Schreiben Sie eine PYTHON-Funktion `myhesse(f,var)`, die die Hessematrix einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ berechnet, wobei `var` ein Tupel ist, das die Variablen enthält, nach denen abgeleitet wird. Das Resultat soll als Matrix (also vom Typ `Matrix`) zurückgegeben werden.

(c) Testen Sie Ihre Funktionen für $f(x, y, z) = x^2 + \sin(y)z + 3x\mathrm{e}^{-z}$.

Wichtig: Verwenden Sie nicht die in `sympy` implementierten Funktionen `jacobian` und `hessian`.

Aufgabe 42:

Für $x \in \mathbb{R}\backslash\{-4, 7\}$ sei

$$f(x) := \frac{4x^3 - 7x + 5}{(4 + x)(7 - x)}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie die Taylorpolynome $P_1, \ldots, P_{15}$ von f entwickelt in $x = 0$.

(b) Zeichnen Sie die Graphen von $f, P_6, \ldots, P_{11}$ in ein Bild über den Intervallen $[-4, 7]$ und $[-2, 5]$ in verschiedenen Farben und fügen sie jeweils eine Legende außerhalb des Plots hinzu.

(c) Berechnen Sie außerdem $|f(a) - P_j(a)|$ für $a \in \{-\frac{1}{2}, 1\}$ und $j = 1, ..., 15$ exakt und geben Sie die Werte als *float* aus.

Aufgabe 43:

Es sei

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

und es sei F eine Stammfunktion von f.

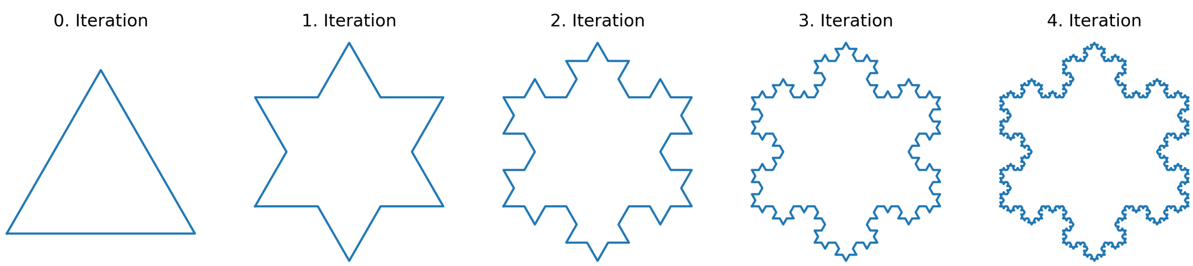
(a) Wie lautet die Bezeichnung von F in `sympy`?

(b) Berechnen Sie die Taylorentwicklung von f und F bis zur Ordnung 16.

(c) Differenzieren Sie die Taylorentwicklung von F und vergleichen Sie sie mit der von f.

Aufgabe 44:

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck. Im ersten Schritt teilt man jede Seite in drei gleich lange Strecken und setzt auf das mittlere Drittel ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seiten genauso lang sind, wie die Teilstrecken der Ausgangsseite. Nun wiederholt man dieses Vorgehen für die neuen Seiten. Die durch weitere Iterationen entstehende Figur bezeichnet man als *Kochsche Schneeflocke*.



(a) Schreiben Sie eine PYTHON-Funktion `koch(n)`, die iterativ die Eckpunkte der Kochschen Schneeflocke *exakt* berechnet und zurückgibt.

(b) Zeichnen Sie mit Hilfe von `koch` die Iterationen 0 bis 4 der Kochschen Schneeflocke.

Hinweis: Beginnen Sie mit der Berechnung des gleichseitigen Dreiecks. Nehmen Sie sich dann je zwei benachbarte Punkte und überlegen Sie sich, wie sie mit Hilfe dieser beiden Punkte die drei neuen Punkte des aufgesetzten gleichseitigen Dreiecks berechnen können. Achten Sie außerdem darauf, dass Sie die Punkte in der richtigen Reihenfolge speichern, damit Sie diese anschließend problemlos zeichnen können. Die Grafik unter `https://de.wikipedia.org/wiki/Koch-Kurve` im Abschnitt Konstruktion kann behilflich sein.

Besprechung in den Übungen vom 6.-10. Januar 2020.