

Computergestützte Mathematik zur Analysis – 10. Übungsblatt

Aufgabe 37:

Betrachten Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) Berechnen Sie „von Hand“ die Eigenwerte dieser Matrix.
Das heißt: Berechnen Sie mit Hilfe der Determinante das charakteristische Polynom und ermitteln Sie daraus die Eigenwerte.
- (b) Berechnen Sie außerdem die zugehörigen Eigenvektoren \tilde{v} .
- (c) Normieren Sie die Eigenvektoren \tilde{v} , indem Sie $v = \frac{\tilde{v}}{\|\tilde{v}\|_2}$ berechnen.

Aufgabe 38:

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie die Ränge von A und $[A \mid b]$ und machen Sie eine Aussage über die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.
- (b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ und geben Sie die Lösung als Vektor an. Überprüfen Sie, ob dieser Vektor das System tatsächlich löst.
- (c) Geben Sie zwei konkrete Lösungen des Systems an.

Aufgabe 39:

Es sei die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

- (a) Berechnen Sie $M \cdot M^T$ und $M^T \cdot M$ und bestimmen Sie jeweils die Determinante.
- (b) Sei U diejenige Matrix, die aus $M \cdot M^T$ entsteht, wenn man die äußeren Zeilen und Spalten streicht, d. h. U ist der innere 2×2 Block von $M \cdot M^T$. Berechnen Sie $U^2 \cdot (M^T \cdot M)^{-1}$.
- (c) Sei $V := M \cdot M^T + D$, wobei D die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $[0, 1 + 2t, 1 - 3t, 0]$ ist. Bestimmen Sie, für welche Werte von t die Determinante von V verschwindet.

Aufgabe 40:

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = -(x^3 + 3x^2 + 4x + 3)e^{-x}.$$

- (a) Plotten Sie die Graphen von f , f' und f'' zusammen mit einer Legende gut sichtbar über dem Intervall $[-2, 6]$ in verschiedenen Farben.
- (b) Bestimmen Sie alle lokalen Extremalstellen von f und stellen Sie fest, welche von ihnen Maximal- bzw. Minimalstellen sind.
- (c) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(\frac{1}{4}, f(\frac{1}{4}))$ und plotten Sie den Graphen und die Tangente in eine Grafik. Bestimmen Sie ferner numerisch alle Schnittpunkte der Tangente mit f .