MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ANDREAS TROLL

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

4.12.2018

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 9. Übungsblatt

Aufgabe 30: (Konstruktion von Mehrschrittverfahren)

Es sei ϱ ein Polynom vom Grad $\leq k$ mit $\varrho(1) = 0$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt genau ein Polynom σ vom Grad $\leq k$, so dass die Ordnung des zugehörigen Mehrschrittverfahrens mindestens $k+1$ ist.

(b) Es gibt genau ein Polynom σ vom Grad $< k$, so dass die Ordnung des zugehörigen Mehrschrittverfahrens mindestens k ist.

Hinweis: Ein MSV hat die Ordnung p genau dann, wenn

$$\frac{\rho(\xi)}{\log(\xi)} - \sigma(\xi) = \mathcal{O}((1-\xi)^p) \quad \text{für } \xi \to 1.$$

Aufgabe 31:

Beweisen Sie Satz 3 aus (5.7):
Ist $ggT(\rho, \sigma) = 1$ und ist $\sigma(\zeta) = 0$ für ein ζ mit $|\zeta| > 1$, so ist $\mathcal{S}$ beschränkt.

Aufgabe 32:

(a) Implementieren Sie das explizite Eulerverfahren.

(b) Implementieren Sie das implizite Eulerverfahren. Lösen Sie dabei das nichtlineare Gleichungssystem mittels Fixpunktiteration.

(c) Wenden Sie das explizite und das implizite Eulerverfahren jeweils auf ein Räuber-Beute Modell an. Verwenden Sie dazu eine relativ große Schrittweite und stellen Sie das Ergebnis graphisch dar.

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= -2r(t) + r(t)b(t) \qquad && r(0) = 1 \\ \dot{b}(t) &= b(t) - r(t)b(t) && b(0) = 1.5 \end{aligned}$$

Aufgabe 33:

Zeigen Sie, dass die Zweischrittverfahren aus Aufgabe 29

(a) 0-stabil sind, genau dann, wenn $\alpha \geq 1/2$

(b) A-stabil sind, genau dann, wenn $\alpha \geq 1/2$ und $\beta > \alpha/2$.

Hinweis zu (b): Es ist

$$\frac{\sigma(\zeta)}{\rho(\zeta)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\zeta+1}{\zeta-1} + \left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\zeta - 1}{\alpha(\zeta-1)+1}.$$

Besprechung der Übungsaufgaben in den Übungen ab Montag, 10.12.2018.