MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. ACHIM SCHÄDLE
ANDREAS TROLL

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

27.11.2018

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 8. Übungsblatt

Aufgabe 26:

Gegeben seien die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vollziehen Sie an diesen Beispielen die Aussage des oberen Diagramms aus Kapitel 5.5 der Vorlesung nach: Finden Sie Transformationsmatrizen T_A, T_B so, daß $T^{-1}AT = \Lambda_A$ und $T^{-1}BT = \Lambda_B$ mit Λ_A, Λ_B diagonal gelten. Lösen Sie die Differentialgleichungen $y' = Ay$, $y' = By$ exakt, und geben Sie die Lösungsvorschrift des expliziten und impliziten Eulerverfahrens an. Wenden Sie dann die Transformation $z = T^{-1}y$ auf die numerischen Löser an.
Leiten Sie andererseits die Vorschrift der beiden Eulerverfahren für die transformierten DGL $z' = \Lambda_A z$, $z' = \Lambda_B z$ her und vergleichen Sie die dabei entstandenen Verfahren. (vgl. Aufgabe 25)

Aufgabe 27:

Man nennt ein Mehrschrittverfahren symmetrisch, falls

$$\alpha_{k-i} = -\alpha_i \ , \quad \beta_{k-i} = \beta_i$$

für $i = 0, 1, \dots, k$ gilt.

Zeigen Sie, dass die (maximale) Ordnung eines symmetrischen Mehrschrittverfahrens immer gerade ist.

Aufgabe 28:

Bestimmen Sie den Stabilitätsbereich der Trapezregel

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n)$$

und skizzieren Sie ihn in der komplexen Ebene.

Aufgabe 29:

Zeigen Sie, dass alle irreduziblen Zweischrittverfahren der Ordnung zwei durch

$$\rho(\zeta) = (\zeta - 1)(\alpha(\zeta - 1) + 1), \qquad \sigma(\zeta) = (\zeta - 1)^2\beta + (\zeta - 1)\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\right) + 1$$

mit geeigneten Koeffizienten α, β, $\alpha \neq 2\beta$ gegeben sind.

Hinweis: $\rho(e^h) - h\sigma(e^h) = O(h^3)$, $h \to 0$, Taylor-Entwicklung von e^h; Bei Mehrschrittverfahren kommt es nicht auf die Skalierung der Polynome an, obige sind nicht wie in der Vorlesung skaliert.

Definition: Ein Verfahren ist irreduzibel, wenn σ und ρ keine gemeinsamen Wurzeln besitzen.

Besprechung der Übungsaufgaben in den Übungen ab Montag, 3.12.2018.