Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Andreas Troll

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

20.11.2018

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 7. Übungsblatt

Aufgabe 22:

(a) Zeigen Sie durch Induktion nach j $(j \leq k)$, dass für die Folge $z_k = \zeta^k$, $k = 0, 1, \ldots$ gilt:

$$\nabla^j z_k = \zeta^k \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^j$$

(b) Zeigen Sie damit, dass für implizite Adams-Verfahren

$$\rho(\zeta) = \zeta^k \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right), \qquad \sigma(\zeta) = \zeta^k \sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^j$$

und für BDF-Verfahren, gegeben durch $\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \nabla^j y_{n+k} = h f_{n+k}$,

$$\rho(\zeta) = \zeta^k \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^j, \qquad \sigma(\zeta) = \zeta^k.$$

gilt.

Aufgabe 23:

Zeigen Sie, dass das k-Schritt BDF Verfahren die Ordnung $p = k$ hat.

Aufgabe 24:

Beweisen Sie Satz 4.14 der Vorlesung:

Ein Mehrschrittverfahren ist genau dann stabil (0-stabil), falls für die Nullstellen (Wurzeln) λ von ρ gilt:

$$|\lambda| \leq 1 \quad \text{und} \quad |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda \text{ ist einfache Nullstelle.}$$

Tipp: Gucken Sie sich Beispiel (4.12) oder den Beweis von Satz (4.20) an.

Aufgabe 25:

Zeigen Sie, dass Runge-Kutta- und Mehrschrittverfahren invariant unter linearen Transformationen $y = Tz$ sind, d. h. wenn man das Verfahren auf $y' = f(t, y)$ und auf $z' = T^{-1} f(t, Tz)$ anwendet mit Anfangsbedingungen $y_0 = Tz_0$ (RKV), bzw. $y_j = Tz_j$, $j = 0, \ldots, k-1$ (MSV), so gilt $y_1 = Tz_1$, bzw. $y_k = Tz_k$.

Besprechung der Übungsaufgaben in den Übungen ab Montag, 26.11.2018.