Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Andreas Troll

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

13.11.2018

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 6. Übungsblatt

Aufgabe 18: Es werde $f(t, y(t))$ durch das Interpolationspolynom p durch die Punkte

$$(t_{n-k+1}, f_{n-k+1}), \dots, (t_n, f_n), \qquad f_j := f(t_j, y_j), \qquad t_j = t_0 + h \cdot j$$

interpoliert.
Zeigen Sie mit Hilfe der Newton'schen Interpolationsformel die Darstellung

$$p(t) = p(t_n + \tau h) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{-\tau}{j} \nabla^j f_n.$$

Hierbei sind Rückwärtsdifferenzen $\nabla^j f_n$ rekursiv durch

$$\nabla^0 f_n = f_n, \qquad \nabla^{j+1} f_n = \nabla^j f_n - \nabla^j f_{n-1}$$

und der im oberen Argument kontinuerliche Binomialkoeffizient durch

$$\binom{\tau}{j} = \frac{1}{j!} \prod_{k=0}^{j-1} (\tau - k)$$

definiert.

Aufgabe 19:
Zeigen Sie: Ist

$$a_{s+1-i,s+1-j} + a_{ij} = b_j = b_{s+1-j}, \quad c_i + c_{s+1-i} = 1, \qquad i, j = 1, \dots, s$$

so ist das durch a_{ij}, b_i, c_i definierte, s-stufige Runge-Kutta-Verfahren symmetrisch.

Aufgabe 20: Zeigen Sie, dass die

(a) Trapezregel

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} h(f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_{n+1}))$$

(b) und die implizite Mittelpunktregel

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1}))$$

Ordnung 2 besitzen.

bitte wenden

Aufgabe 21:

Schreiben Sie ein adaptives Programm, welches ein Anfangswertproblem mit einem 4-stufigen RKV (klassisches RK-Verfahren aus Aufgabe 15 oder 3/8-Regel ((3.25) 2)) löst und die Schrittweiten adaptiv anpasst:

Implementieren Sie dazu eine Funktion `rkv_core(f, t_n, y_n, h_n)` welche einen Schritt ausführt, als Parameter die rechte Seite $f(t, y)$, den Zeitpunkt t_n, den zugehörigen Wert y_n und die aktuelle Schrittweite h_n annimmt und den neuen Wert y_{n+1} sowie eine Schätzung $[\epsilon]$ für den Fehler zurückliefert. Verwenden Sie dabei den auf einem eingebetteten geschachtelten Verfahren basierenden Fehlerschätzer aus der Vorlesung mit $c = 1$ bzw. den aus der Übung mit $\hat{b}_5 = \frac{1}{12}$.

Schreiben Sie dann eine Funktion `RKV_adaptiv(f, tspan, y_0, Tol, r, q, rho)` mit einer Schleife, die durch Aufruf von `rkv_core` das AWP über das gesamte gegebene Intervall $tspan = [t_0, t_{end}]$ löst. Benutzen Sie für das Aktualisieren der Schrittweite statt (3.24) 6) die Formel

$$\mathtt{h} = \mathtt{h_j} \cdot \min\left(\mathtt{q}, \max\left(\mathtt{r}, \left(\frac{\rho Tol}{\|\mathtt{err}\|}\right)^{1/(p+1)}\right)\right),$$

wobei Sie $\mathtt{r} = 1/4$, $\mathtt{q} = 4$, $\mathtt{Tol} = 10^{-4}$, $\rho = 0.9$ und $h_0 = (t_{end} - t_0)/100$ wählen.

Testen Sie dieses Programm mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$ am

- Harmonischen Oszillator $y'' = -y$
- Mathematischen Pendel $y'' = \frac{g}{l}\sin(y)$, mit $g = 9.81ms^{-2}, l = 0.5m$.

Plotten Sie die Lösungen und auch die von Ihrem Programm verwendeten Schrittweiten.

Besprechung der Übungsaufgaben in den Übungen ab Montag, 19.11.2018.