Mathematisches Institut
Prof. Dr. Achim Schädle
Andreas Troll

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

6.11.2018

# Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 5. Übungsblatt

## Aufgabe 14:

Schreiben Sie alle Ordnungsbedingungen für Runge-Kutta-Verfahren bis zur Ordnung 5 auf (3.20) und ergänzen Sie die Tabelle aus der Vorlesung (3.22).

## Aufgabe 15:

(a) Bestimmen Sie die Ordnung des klassischen, vierstufigen Runge-Kutta-Verfahrens.

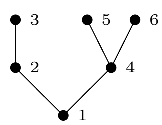
(b) Konstruieren Sie mit den Knoten des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens ein erweitertes Tableau, so dass das resultierende Verfahren, eine Ordnung um 1 geringer ist.

## Aufgabe 16:

Überlegen Sie sich, dass es für jeden Baum $\tau \in \mathcal{T}$ ein System von Differentialgleichungen $y' = f(y)$ mit Anfangswert $y_0 = 0$ gibt, so dass für die erste Komponente $F^1$ des elementaren Differentials gilt:

$$F^1(\tau)(y_0) \neq 0 \qquad F^1(\widetilde{\tau})(y_0) = 0 \qquad \text{für alle } \widetilde{\tau} \in \mathcal{T},\ \widetilde{\tau} \neq \tau$$

Hinweis: Zu dem Baum




gehört das System

$$(y^1)' = y^2 y^4, \quad (y^2)' = y^3, \quad (y^3)' = 1, \quad (y^4)' = y^5 y^6, \quad (y^5)' = 1, \quad (y^6)' = 1.$$

## Aufgabe 17:

Jedes Runge-Kutta-Verfahren kann in der Form

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h)$$

mit einer geeigneten Funktion $\Phi$ geschrieben werden. Gilt auch

$$y_n = y_{n+1} - h\Phi(t_n + h, y_{n+1}, -h),$$

(ein Schritt mit Schrittweite $-h$ führt zu $y_n$ zurück), so heißt das Verfahren symmetrisch und man kann einige wichtige Eigenschaften (z. B. asymptotische $h^2$-Entwicklungen des Fehlers) nachweisen.

Zeigen Sie:

(a) Das explizite Eulerverfahren ist nicht symmetrisch.

(b) Die implizite Mittelpunktsregel $y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1}))$ ist symmetrisch.
Wie sieht das Tableu der impliziten Mittelpunksregel aus?

**Besprechung der Übungsaufgaben in den Übungen ab Montag, 12.11.2018.**