

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – 4. Übungsblatt

Aufgabe 13 gibt 4 Punkte!

Aufgabe 13:

In vielen Bereichen des Alltags treten gewöhnliche Differentialgleichungen in Form von Ratengleichungen auf. Sie modellieren die Zeitentwicklung verschiedenster Mengen und Populationen, abhängig von äußeren Gegebenheiten, die nur noch in Form von Koeffizienten in Erscheinung treten.

Für ein realistisches Beispiel betrachten wir nun das Szenario einer globalen Zombieplage:

www.math.upenn.edu/~ted/203S10/Projects/Zombies/Zombies.pdf (siehe Vorlesungsseite)

Eine durch Zombieangriffe übertragene Seuche breite sich in der Bevölkerung aus; die Erkrankten verwandeln sich ebenfalls in Zombies. Sind S die Anzahl der gesunden Menschen, Z die der Zombies und R die der Verstorbenen, so ist ein erstes, einfaches Modell dieses Systems gegeben durch

$$\begin{aligned}\dot{S} &= \Pi - \beta SZ - \delta S \\ \dot{Z} &= \beta SZ + \zeta R - \alpha SZ \\ \dot{R} &= \delta S + \alpha SZ - \zeta R.\end{aligned}$$

Dabei ist Π eine als konstant angenommene Geburtenrate, β die Rate, mit der Menschen durch Kontakt mit wandelnden Toten ebenfalls zu Zombies werden. δ bezeichnet die Rate eines nicht-zombiebedingten Todes und ζ repräsentiert die Rate des Wiederaufstehens der Toten. Untote unschädlich zu machen, ist nicht einfach; der Parameter α beschreibt die Wahrscheinlichkeit eines solchen Falles.

- Implementieren Sie dieses und verwenden Sie verschiedene Algorithmen, um die Gleichungen zu integrieren (beispielsweise: Aufgabe 9 oder Octave: `lsode`, `ode45/23`, Matlab: `ode23/45/15s...`, Scipy: `scipy.integrate.ode`, `scipy.integrate.solve_ivp`). Verwenden Sie für die Koeffizienten $\Pi = 0$, $\alpha = 0.005$, $\beta = 0.0095$, $\zeta = 0.0001$ und $\delta = 0.0001$ und als Startwerte die Bevölkerung einer kleinen Stadt: $S(0) = 10000$, $Z(0) = 1$, $R(0) = 0$. Diskutieren Sie die Ergebnisse und mögliche Verbesserungen des Modells.
- Erweitern Sie nun das Modell entsprechend dem dritten Kapitel des Papers: Unglückliche, die Kontakt mit einem Zombie hatten, verwandeln sich nun nicht mehr sofort selbst in Zombies, sondern durchlaufen vorher eine kurze Phase latenter Infektion (I sei die Anzahl der Infizierten). Modifizieren Sie eine Kopie Ihres Programmes, um diesen Fall mit einzuschließen, und lösen Sie die Gleichungen erneut mit $\rho = 0.005$ und $I(0) = 0$.
- Angenommen, die beschriebene Inkubationszeit ist stets gleich: Beschreibt das Modell aus (b) die Wirklichkeit korrekt? Wie müßte es verändert werden?

Besprechung der Übungsaufgaben in den Übungen ab Montag, 5.11.2018.